6. Induktives Denken: Prädikativ - funktional

Unsere bisherigen Untersuchungen (Überblick s. Xu 1994, S. 2) zum prädikativen versus funktionalen Denken haben wir auf dem Gebiet des Erwerbs der grundlegenden Begriffe der Programmierung beim einschlägigen Problemlösen durchgeführt. Diese Arbeiten stellen die Grundlagenforschung zu einem langjährigen von Cohors-Fresenborg wissenschaftlich begleiteten niedersächsischen Schulversuch dar und haben weitreichende Konsequenzen für die Curriculumentwicklung gehabt (z. B. Cohors-Fresenborg & Kaune 1993, Schwank 1993a).

Zur Repräsentation der mathematischen Ideen hatten wir in der Vergangenheit drei zwar vom mathematischen, nicht aber vom psychologischen Standpunkt aus äquivalente Mikrowelten (Schwank 1990b) eingesetzt, die sich zudem durch ihre Berechnungsuniversalität auszeichnen. Grundsätzlich betrachtet können in allen dreien die untersuchten Begriffe durch Problemlösen erworben werden, aber sie erlauben es, in unterschiedlicher Weise in den Dingen etwas für das Problemlösen Geeignetes zu sehen und dabei in unterschiedlicher Weise adäquate Begriffe auszubilden. Während wir in der Vergangenheit an einem Vergleich der Begriffsbildung aufgrund unterschiedlicher Einsichtsmöglichkeiten in den verschiedenen Mikrowelten interessiert waren, wollen wir uns hier mit der weiterreichenden Frage beschäftigen, inwieweit sich der Einsatz der uns interessierenden kognitiven Strukturen auch in anderen Bereichen nachweisen läßt. Xu (1994) hatte bereits mit der Öffnung der Fragestellung begonnen und sich dazu einen physikalischen Problembereich gewählt. Wir wollen hier am Beispiel von Musterergänzungsaufgaben ein grundsätzlicheres Thema behandeln, das unter dem Stichwort "induktives Denken" in der Psychologie bekannt geworden ist.

Seit ca. 2 Jahren beschäftigen wir uns dazu mit einer neuen Art des Einsatzes von Musterergänzungsaufgaben (Beispiel: Abb. 3). Es handelt sich bei diesen Aufgaben um hinlänglich in der Psychologie bekanntes Material, das gerne in Intelligenztests eingesetzt wird. Es wird angenommen, daß eine hohe Testleistung auf einer entsprechend hohen Fähigkeit zum induktiven Denken beruht, das damit zu einem für die allgemeine Intelligenz maßgeblichen Faktor wird (vgl. z. B. Klauer 1993a, S. 141, Seel & Dinter 1991, S. 99f). Infolge spielt das Training induktiven Denkens eine wichtige Rolle in Denk-Förderungsprogrammen für Kinder, so im langjährigen Forschungsprogramm von Klauer (z. B. 1989, 1991a).

Wir selbst hatten seit langem den aus Musterergänzungsaufgaben mit vorgegebenen Lösungsmöglichkeiten bestehenden APM-Test von Raven (1965) bei VP, die über keine einschlägigen Vorkenntnisse verfügten, eingesetzt, um länderübergreifend (China, Indonesien, Deutschland) bezüglich ihrer intellektuellen Leistungshöhe vergleichbare Versuchspopulationen zu bestimmen. Das klappte auch hinreichend gut. Diejenigen VP, deren APM-Punkte im oberen Drittel der erreichbaren Punkte lagen, ließen sich gut hinsichtlich ihrer Bevorzugung einer prädikativen bzw. funktionalen kognitiven Struktur während der Beschäftigung mit unseren drei Mikrowelten beim Erwerb mathematisch-informatischer Grundbegriffe analysieren. Nach langjährigem naiven Einsatz des APM-Testes weckte schließlich ein genauerer Blick auf die Aufgaben Erstaunen. Es schien so, als sei zum Lösen der Aufgaben die kognitive Handhabe der *Eigenschaften* (Prädikate) der gegebenen Formen (z. B. rund, quadratisch, schraffiert, groß) nötig und daß über diese Eigenschaften die Strukturierung der Situation zu erfolgen hätte, um die passende Lösung aus der vorgegebenen Lösungsmenge auszuwählen (vgl. z. B. auch Klix 1976, S. 603ff).

Wie konnte es dann sein, fragten wir uns, daß sich VP, die sich bei unseren Programmieraufgaben als funktional besonders leistungsfähig erwiesen, auch in den oberen APM-Punkterängen wiederfanden und nicht ganz klar von den bei den Programmieraufgaben prädikativ besonders leistungsfähigen VP übertroffen wurden. Sollten die funktionalen VP zu einer prädikativen Vorgehensweise gewechselt haben und diese dann auch noch besser beherrschen? Oder?

Den Hinweis auf eine Lösung des Rätsels brachte eine genauere Analyse der Aufgaben, die über die in der Literatur übliche, einseitig prädikative hinausreicht. Dort (z. B. Holland et al. 1986, Klauer 1991a, Lüer & Spada 1992, Pellegrino 1985, Sternberg 1987a; vgl. die Zusammenstellung von Hager & Hasselhorn 1995b, S. 209ff) werden unter dem Konstrukt "Induktives Denken" solche geistigen Aktivitäten subsumiert, welche das Erkennen und Anwenden von Regelhaftigkeiten, begründet auf Merkmalsanalysen, betreffen, und damit eben nur eine prädikative Form induktiven Denkens abgehandelt.

6.1 Prädikatives induktives Denken

Wir setzen uns hier im einzelnen mit dem offenkundig prädikativen Ansatz zum induktiven Denken von Klauer auseinander, da dieser zumindest im deutschsprachigen Raum durch zahlreiche Veröffentlichungen recht bekannt geworden ist und uns in diesem Fall das für unsere tieferreichenden Analysen notwendige, umfangreichste Informationsmaterial zur Verfügung stand. Spannend wird es für uns nicht zuletzt dadurch, daß Klauer zur Auslotung seiner Theorie u. a. auch den uns interessierenden APM-Test (bzw. die einfachere Variante SPM) eingesetzt hat.

Wir wollen aufzeigen, daß Klauer mit seinem theoretischen Ansatz, der experimentellen Durchführung und Interpretation nur einen Ausschnitt induktiven Denkens erfaßt. Wir werden später auf die Kritik anderer an den Klauerschen Arbeiten eingehen, auch diese verlassen nicht die prädikative Rahmung. Ziel ist es, deutlich zu machen, daß es eine Lücke in der Theoriebildung sowie der experimentellen Forschung gibt.

Abb. 2: Klauersches induktives Denken

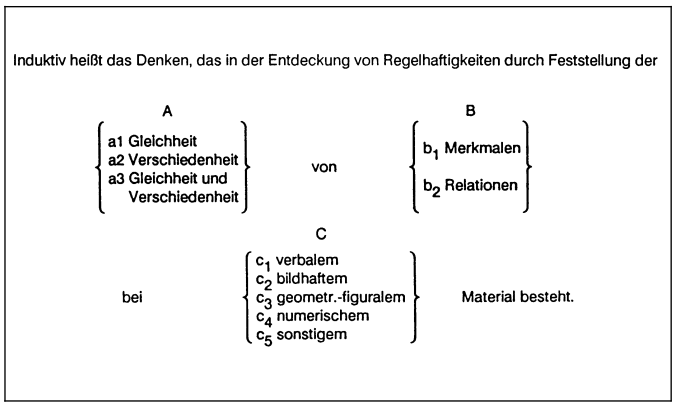
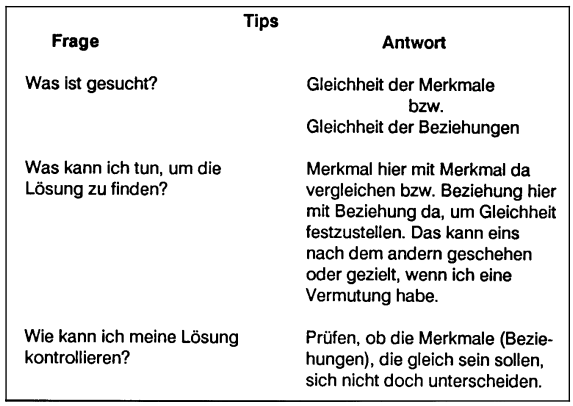


Abb. 2a: Definitionssatz zum induktiven Denken (aus: Klauer 1993, S. 142)



Tips

Frage	Antwort
Was ist gesucht?	Gleichheit der Merkmale bzw. Gleichheit der Beziehungen
Was kann ich tun, um die Lösung zu finden?	Merkmal hier mit Merkmal da vergleichen bzw. Beziehung hier mit Beziehung da, um Gleichheit festzustellen. Das kann eins nach dem andern geschehen oder gezielt, wenn ich eine Vermutung habe.
Wie kann ich meine Lösung kontrollieren?	Prüfen, ob die Merkmale (Beziehungen), die gleich sein sollen, sich nicht doch unterscheiden.

Abb. 2b: Beispiel für ein im Denktraining II zu lernendes Verfahren zum Lösen von Aufgaben zur Generalisierung oder Beziehungserfassung (aus: Klauer 1991, S. 83)

Wie der Abb. 2a seines Definitionssatzes zum induktiven Denken entnommen werden kann, hat Klauer das Denken in Gleichheiten/Verschiedenheiten von Merkmalen und Relationen angesichts von Aufgaben an zentrale Position gerückt. Untermauert wird dies von ihm durch den (über die Jahre hinweg mit wenig geändertem Wortlaut formulierten) Anspruch, daß die Zurückführung des Denkens auf ein Operieren mit Merkmalen und Relationen zur Erfassung eines Sachverhaltes diesen allumfassend, von allen überhaupt möglichen Seiten kognitiv erschließt.

> Logisch betrachtet, läßt sich jeder Sachverhalt, mit dem wir uns beschäftigen können, mit Hilfe von Argumenten und Prädikaten darstellen. Argumente bezeichnen dabei Gegenstände, über die gesprochen wird, und Prädikate das, was von den Gegenständen ausgesagt wird. Man unterscheidet je nach der Zahl ihrer Argumente einstellige und mehrstellige Prädikate. Erstere heißen auch Merkmale, letztere Relationen. Folglich erschöpfen Merkmale und Relationen *alle Möglichkeiten*, um etwas über Gegenstände auszusagen … (Masendorf & Klauer 1986, S. 46, eigene Hervorhebung)
> … , woran man erneut die weitreichende Bedeutung dieses Ansatzes erkennt. (Klauer 1989, S. 23, Klauer 1991a, S. 24).

Klauer unterläuft mit seiner Argumentation ein folgenschwerer Fehler: Merkmale und Relationen sind (wie in der mathematischen Logik bekannt) *nicht* die einzigen universellen Möglichkeiten, etwas über Gegenstände auszusagen (vgl. Abschnitt 5). Bedingt durch den fälschlichen All-Anspruch ist in Klauers System klein Platz für Alternativen geistiger Auseinandersetzung, etwa ein eigenständiges, ebenso leistungsstarkes funktionales Vorgehen.

Schwerpunkt seiner Arbeiten ist die auf der angegebenen theoretischen Überlegung beruhende Konzeption von Programmen zur Förderung des induktiven Denkens von Kindern und Jugendlichen (Klauer 1989, 1991a, 1993e).

Zum Einsatz der Denktrainings

Einen Hinweis darauf, in welcher Dimension Klauers Denktrainings Wirkungen zeitigen, ergibt sich aus der vorgesehenen Art, wie das Training nach Anweisung eingesetzt werden soll. Klauer fordert immer wieder "intensives Üben", damit das, was zu tun ist, "automatisiert" wird, Die Kinder bekommen ein aus seinem Definitionssatz zum induktiven Denken abgeleitetes algorithmisch-mechanisches Verfahren (vgl. Abb. 2b) beigebracht, daß bei korrekter Anwendung zur Lösung führt. Ein Problem braucht dann nicht mehr selbst denkerisch erschlossen zu werden. Man weiß sofort, was zu tun ist. Die Richtschnur, wie der Sachverhalt zu erschließen ist, ist mit dem Verfahren bereits gegeben und so geistige Leistung abgenommen. Z. B. lautet es häufig wie folgt in der zitierten Handanweisung zum Denktraining II (Klauer 1991a):

> Diese Klassifikationsleistung muß auch weiterhin geübt und vertieft werden, so daß sie später mehr oder minder *automatisiert* und schnell abläuft. (a.a.O., S. 82, eigene Hervorhebung)
> Hier soll das Verfahren beim Lösen von Merkmalsaufgaben besonders *intensiv geübt* und *automatisiert* werden. (a.a.O., S. 88, eigene Hervorhebung)
> Außerdem kommt es darauf an, die Vergleichsprozesse jeweils der Aufgabenstellung entsprechend anzupassen, was ebenfalls bereits *sehr intensiv geübt* worden ist. Aber durch den mit jeder Aufgabe verbundenen Wechsel wird nun auch die Umstellung beim Vergleichsprozeß *besonders intensiv geübt*. (a.a.O., S. 89, eigene Hervorhebung)

Klauer spricht gar davon, daß durch dieses intensive Üben erreicht wird, daß die Kinder ohne viel nachzudenken wissen, was zu tun ist.

> Wird den Schülern die Regel durch entsprechende Übung geläufig, *so wissen sie ohne viel Nachdenken, was zu tun ist*, wenn ihnen eine beliebige Aufgabe der fraglichen Art begegnet. (Klauer 1991b, S. 148, eigene Hervorhebung)

Das legt den Schluß nahe, daß das Denktraining - entgegen der mit seinem Titel verbundenen Assoziationen und entgegen der theoretischen Vorgaben - erreichen soll, daß die Kinder nicht mehr (so sehr viel) zu denken brauchen. Entgegen seinem globalen Anspruch bewegt sich Klauer auf diese Weise weit entfernt von dem Terrain, das wir uns mit der Untersuchung mathematischen Denkens vorgenommen haben.

Individuelle Unterschiede in den Betrachtungen Klauers

Klauer selbst stellt zwar in einer Schlußbemerkung in Frage, inwieweit welche Probanden von seinem Training profitieren und vermutet individuelle Unterschiede. Doch ist das eher als rhetorische Spekulation zu bewerten. Er zieht daraus keine Konsequenzen hinsichtlich seines Theorie-Ansatzes.

> Selbstverständlich ist damit noch nicht geklärt, in welchem Ausmaß welche Probanden von einem solchen Training profitieren. Da wird man mit individuellen Unterschieden rechnen müssen, und Erbfaktoren wie Umwelteinflüsse dürften ebenfalls eine Rolle spielen. Doch liegen Fragen dieser Art schon außerhalb des Rahmens, in dem sich die bisherigen Forschungen zum Training des induktiven Denkens bewegen. (Klauer 1993, S. 161)

Gelegentlich ist in diesem Zusammenhang auch von "*(alle?) Menschen*" (z. B. Klauer 1989, S. 26), statt von "allen Menschen" die Rede, hilft aber genauso wenig weiter. Das Anliegen sollte in unseren Augen nicht nur einem Mehr oder Weniger gelten sondern eben auch dem "Anders".

Klauer schafft es tatsächlich, die verschiedensten Aufgaben zum induktiven Denken auf eine (prädikative) Linie zu bringen und systematisiert sie dazu nach Kategorien wie Generalisierung, Diskrimination oder Kreuzklassifikation etc. Einmal auf diesen Weg geraten, wird selbst eine Aufgabe zur Angabe der Drehrichtung von Zahnrädern in eine *Beziehungs*erfassungs-Kategorie eingeordnet (Klauer 1991, Aufgabe 16; vgl. auch Klix 1992, S. 123, s. aber van der Waerden 1954, S. 169, Dodge 1896, S. 10). Kinder, die (nach unserer Klassifikation) funktionale Argumentationen anbieten, haben (nach Klauers Bewertung) das Lernziel (noch) nicht erreicht. Die Andersartigkeit wird hier zur Unvollkommenheit,

die Kinder verfolgen eine "unreife Strategie". In Klauers Handanweisung zur Durchführung seines Denktrainings II für Kinder heißt es:

> Je nach dem Entwicklungsniveau führt man den Begriff "Beziehung" ein oder nicht. Als Zwischenstufe kann man auch von *Veränderungen* sprechen.
> Die Kinder sollen mindestens zu unterscheiden lernen, ob man von einem Merkmal oder einer Relation spricht, wenn es heißt:
> *Der Ball ist rund.* (Merkmal, sagt was von einem Ding.)
> *Der Ball ist leichter als das Buch.* (Beziehung, sagt was vergleichend von zwei Dingen.)
> Nach dieser oder einer ähnlichen Einführung beginnt man, die neuen Aufgaben durchzuarbeiten. Bei jeder Aufgabe unterscheidet man aber nun und läßt erklären, ob man auf Eigenschaften oder auf Beziehungen zu achten habe. (Klauer 1991a, S. 79, eigene Hervorhebung durch Unterstreichen)

Das heißt, wer durch die Zahnradaufgabe zu einer Vorstellung angeregt wird, wie das eine Zahnrad das andere beeinflußt und dadurch in seiner Lage verändert, nicht aber vermag, die vorliegende Relation zu erkennen, ist nach Klauers Betrachtungsweise kognitiv unterentwickelt.

Wir sehen in der negativen Bewertung des Redens über Veränderungen zur Erfassung einer Situation Auswirkungen eines möglicherweise falsch verstandenen Piagets (oder auch Bruners). Betrachten wir die von uns eingesetzten Mikrowelten. Unterrichtskonzepte mit den auf operierende Weise umzugehenden Dynamischen Labyrinthen lassen sich vorzüglich in der Grundschule umsetzen (Zeichnungen der Aufgaben laufen schon schlechter), stellt man die gleichen Aufgaben aber in der formalen Welt der Registermaschine, scheitert man noch in der 4. Klasse schon bald nach den ersten einfachen Aufgaben. Die Kinder haben offenkundig früher die kognitive Entwicklungsstufe erreicht, sinnvoll operierend tätig zu sein, und erst später eine kognitive Entwicklungsstufe, die ausreicht, um abstrakter und formal denken zu können. Dieses ist seit Piaget hinreichend bekannt und hat Didaktiker immer wieder angeregt. Daraus jedoch i. a. zu schließen, daß das Einlassen und Hervorheben des Handlungsaspekts stets geistig niederwertiger ist und deshalb anzustreben ist, diese Vorgehensweise durch die abstrakte Erfassung der vorherrschenden Relation zu ersetzen, ist fatal. Ebenso gut könnte man dann - ganz nach dem Motto "kleine Kinder benötigen Bilderbücher" - die Bilderwelt als Kinderkram abtun und auf die Konzeption eines anspruchsvollen Denkens unter Ausnutzung visueller Vorstellungen verzichten.

Sollte es sich um Handlungen im Sinne von Aufbauvorschriften handeln, vergibt man die Chance, Phänomenen wie dem im Abschnitt 4 besprochenen Corel-Kreis (auf unmittelbare und elegante) Weise gerecht zu werden. Das wäre in Anbetracht des Voranschreitens der Neuen Technologien durchaus verhängnisvoll. Tatsächlich gibt es einen Bruch zu beobachten zwischen dem, was in der Psychologie als menschliches Denken untersucht und abgehandelt wird, und den kognitiven Leistungen von Menschen bei der Ausarbeitung und Beherrschung (moderner) mathematischer Konstrukte (wie Automatentheorie, neuronale Netze, classifier systems, parallele, objekt- bzw. oberflächenorientierte Programmierung etc.) bzw. den Anforderungen an das Denken, die etwa moderne Computeralgebra-Systeme zur Behandlung der Differential- und Integralrechnung (z. B. Derive) sowie solche zur Behandlung geometrischer Fragestellungen (z.B. Cabri-Géomètre) stellen, die derzeit schon in die Schule Einzug halten.

Diese Betrachtung ist um so wichtiger, als Klauer unter dem Eindruck der von ihm nach statistischen Kriterien erzielten positiven Auswirkungen seines Denktrainings auf verschiedenste Lernbereiche (s. u.) *fordert*, daß sein theoretisches Konzept in der Schule übernommen und entsprechend unterrichtet werden soll (z. B. Klauer 1991b, S. 146f, 1996a, S. 53f, 1996b, S. 85f). Wir können diese Meinung nicht uneingeschränkt teilen.

Neben den logisch-inhaltlichen Argumenten ist es fraglich, was man erreicht - oder zerstört, wenn man einem Kind mit einem hohen Potential zur funktionalen Vorgehensweise vorschreibt (z. B. durch auf Automatisierung zielendes Training), die Aufgaben grundsätzlich prädikativ zu lösen, und versucht, ihm die funktionale als doch nicht letztlich zufriedenstellende abzugewöhnen. Lehren und Lernen von Mathematik/Informatik ist schwierig genug, da wäre es naiv, von vornherein auf eine einem Individuum natürliche und prinzipiell erfolgreiche Zugangsweise zu verzichten.

Wenn auch die Theorie Klauers so nicht haltbar ist, stellt sich doch die Frage, welche Erkenntnisse sich aus den recht zahlreichen praktischen Einsätzen seines Denktrainings ableiten lassen. Dieses wollen wir im folgenden untersuchen.

Analyse der experimentellen Befunde

Während die Analyse des theoretischen Ansatzes von Klauer unter Anwendung des benutzten logischen Argumentes schnell von der Hand geht, ist die Situation hinsichtlich der experimentellen Befunde zum Einsatz des Denktrainings verzwackter und undurchsichtig. Wir gehen hier unter zwei Aspekten darauf ein: Zum einen interessieren uns die feststellbaren Auswirkungen beim Einsatz, hier insbesondere hinsichtlich eines möglichen Einflusses auf ein Abschneiden in einem der Raventests. Zum anderen stellen wir uns die Frage, wie sich die experimentelle Befundlage mit unserer Theorie der prädikativen/funktionalen kognitiven Strukturen verträgt.

Die Verzwacktheit der Situation liegt nicht zuletzt daran, daß es sich bei Klauers Denktraining im Sprachgebrauch von Hager & Hasselhorn (1995a, S. 50) um ein technologisches Programm handelt, daß dem z. B. von Wittrock (1988, S. 289) formulierten Anspruch "*Our first goal is to understand the processes and our ultimate goal is to teach them*." nicht gerecht wird. Das bislang erreichte Verständnis psychischer Prozesse reicht anerkanntermaßen bei weitem nicht aus, um eine solche Forderung erfüllen zu können (vgl. auch von Glasersfeld 1987a). Der von Klauer der theoretischen Konzeption seines Denktrainings zugrundeliegende Definitionssatz zum induktiven Denken darf nicht darüber hinwegtäuschen, daß damit natürlich nicht komplett alles das erfaßt ist, was während des Mitmachens in einer Klauerschen Denktrainingssitzung sich kognitiv so alles abspielt und damit auch mehr oder weniger einer direkten Beeinflussung während des Trainings ausgesetzt ist (man denke z. B. nur an die Wahrnehmung oder das Gedächtnis, Aufmerksamkeit oder Sprachvermögen). Hier setzt auch die Kritik von Hager (z. B. 1995) an, der mittels umfangreicher Studien aufzeigt, daß überhaupt nicht klar ist, was mit dem Denktraining trainiert wird (s. u.). Kommen wir zu den einzelnen Befunden.

Klauer behauptet, daß durch sein Denktraining das induktive Denken trainiert und dadurch die allgemeine Intelligenz (z. B. Klauer 1991b, S. 139f) bzw. die fluide Intelligenz (z. B. Klauer 1993b, S. 333f) gefördert wird, wenn auch nicht unbedingt klar ist, in welcher ihrer Komponenten (Klauer 1995, S. 14).

Er und Mitglieder seiner Gruppe haben wiederholt davon berichtet, daß ein statistisch relevanter, positiver Effekt erzielt werden konnte. Neben positiven Auswirkungen seines Denktrainings auf Bereiche wie u. a. das Rechtschreiblernen (Klauer 1993c), die Fremdsprachenlernfähigkeit (Klauer 1993d), den Erwerb deklarativen Wissens (1994) konnte Klauer auch eine positive Auswirkung auf die Leistungen in den Raven Tests (APM bzw. SPM) nachweisen (z. B. Klauer 1992b, 1994). Tatsächlich sind bei ihm diejenigen VP erfolgreicher im APM- bzw. SPM-Test, die zuvor an seinem Trainingsprogramm teilgenommen haben. Unreflektiert könnte man davon ausgehen, daß die Kinder durch das Denktraining klüger geworden seien - vielleicht sind sie aber auch z. B. nur kundiger geworden.

Die Replikation der Klauerschen Ergebnisse ist in anderen Forschergruppen nicht immer gelungen. So weisen z. B. Beck, Lüttmann & Rogalla (1993) darauf hin, daß sie mit einer wesentlich größeren Stichprobe den Effekt nicht haben nachweisen können und vermuten, daß bei Klauer und seiner engeren Gruppe im Training *ganz massiv geübt* wurde, wodurch der Wert der erzielten Ergebnisse sich entschieden schmälert. Hinweise auf die Rolle des Einübens zeigen sich auch daran, daß der Trainingserfolg mit der Zeit abnimmt (Klauer 1991, S. 57), das heißt die VP nicht eine unerschütterliche neue kognitive Einsicht erworben haben, sondern ein Verfahren an die Hand bekamen, das solange gute Dienste leistet, wie es noch sicher präsent ist.

Hager & Hasselhorn (1993, S. 319) stellen u. a. die Frage, ob das Denktraining (hier Set I) von Klauer nicht neben aufgabenspezifischen "coaching"-Effekten vor allem diskriminative Wahrnehmungsleistungen verbessert, die grundlegend sind für viele Leistungen im kognitiven Bereich. Sie formulieren schließlich die Wahrnehmungshypothese (Hasselhorn & Hager 1995, S. 315) und argumentieren, daß Klauers Denktraining "*zu Verbesserungen in der Schnelligkeit und Genauigkeit der beim Bearbeiten induktiver Denkanforderungen erforderlichen Wahrnehmungsprozesse führt*". Teilweise gelang ihnen die experimentelle Bestätigung (a.a.O., S. 315-336): Wahrnehmungsübungen scheinen "*nicht weniger Kompetenzsteigerungen im Bereich der allgemeinen Intelligenz zu bewirken als die beiden von ihren hier untersuchten Wirkungen her völlig vergleichbaren Denkförderprogramme* [darunter Klauers Denktraining I]".

Auch Klauer selbst ist in neuerer Zeit mit dem Anspruch, mit seinem Denktraining induktives Denken zu trainieren, in Schwierigkeiten geraten. Mit dem Ausgang eines seiner neueren Experimente

(Klauer 1994, 1996) ist er - zu seiner eigenen Beunruhigung - auf ein erklärungsbedürftiges Problem gestoßen. In diesem Fall wurde mit einem Teil der Versuchspopulation der systematische Umgang mit Merkmalen anhand der Untergruppe "Merkmalsaufgaben des Denktrainings II" erarbeitet, mit einem anderen Teil der systematische Umgang anhand der Untergruppe "Relationsaufgaben". Diejenigen Kinder, die ein Merkmalstraining erhalten hatten, aber deutlich weniger diejenigen mit Relationstraining, zeigten im anschließenden APM-Posttest bessere Ergebnisse als zuvor im APM-Prätest. Dabei sollte nach Klauers theoretischen Vorgaben gerade ein intensives Relationstraining von besonderem Nutzen für die anschließende Bewältigung von Raven-Aufgaben sein. Klauer hat für diesen Ausgang keine überzeugende Erklärung.

Gesetzt die Annahme, daß in Klauers Versuchsgruppen (Gymnasiastinnen und Gymnasiasten, Jahrgangsstufe 6) sowohl prädikative als auch funktionale VP mitmachten, spekulieren wir, daß mit dem Merkmalstraining (besser als mit dem Relationstraining) die präzise Wahrnehmungsfähigkeit gefördert wurde, was kombiniert mit der erlernten Routine, an Objekten deren Merkmale auszumachen, die Auswahl einer passenden Lösung aus den vorgegebenen Möglichkeiten in den Raven-Aufgaben erleichtert. Diese Förderung der präzisen Wahrnehmung ist in gewissem Umfang nützlich unabhängig davon, welche kognitive Struktur (prädikativ/funktional) eingesetzt wird. Z. B. konnten wir in Pilotstudien bei gewissen funktionalen VP feststellen, daß ihre eigentlich erfolgreiche funktionale Vorgehensweise deshalb scheiterte, weil Wahrnehmungsanteile nicht zuverlässig funktionierten. Das Relationstraining könnte speziell bei den zwar funktional leistungsstarken, aber prädikativ leistungsschwachen VP zu Verwirrungen und/oder größerer Nichtakzeptanz führen und damit weniger greifen.

Fazit aus der experimentellen Befundlage

Wir halten fest, es ist noch nicht geklärt, was bei der Teilnahme am Klauerschen Training genau an Veränderungen in der Kognition passiert. Es scheint, daß mit diesem Training die vorgegebenen Vorgehensweisen zumindest durch massives Üben lernbar sind. Es scheint weiter naheliegend, daß das Erlernen und häufige Anwenden der vorgegebenen Vorgehensweisen zumindest in dem Teil wirkt, daß das genaue Hinsehen gefördert wird und daß zumindest mit der Untergruppe "Merkmalsaufgaben" ein Verhalten antrainiert werden kann, was bei der Bearbeitung von Raven-Aufgaben nützlich ist. Die Frage, ob/inwieweit damit induktives *Denken* trainiert werden kann, ist noch nicht abschließend beantwortbar. Die Befundlage erweckt den Eindruck, daß die VP durch das Training in neuen Situationen nicht durch eine angereicherte Intelligenz besser gewappnet sind, sondern dadurch, daß sie wissen/abspulen können, was zu tun ist.

Zur prinzipiellen Frage der Trainierbarkeit

Je nachdem, wie man die Wirkung des Klauerschen Trainings einschätzt, könnte man auf eine (leichte) Beeinflußbarkeit der Präferenz für eine der beiden uns interessierenden kognitiven Strukturen schließen, während wir auf der Grundlage unserer theoretischen Überlegungen und deren experimenteller Überprüfung Anlaß haben, von einem stabileren Phänomen auszugehen. Klauers Denktraining zielt vom theoretischen Ansatz her ausschließlich auf eine prädikative kognitive Auseinandersetzung mit Sachverhalten ab. Sollte es in der behaupteten Dimension tatsächlich wirksam werden, und deshalb zu einer Verbesserung der APM-Testleistungen führen, kann die Ursache trainingsbedingt nicht an der Stärkung des funktionalen Vorgehens liegen, sondern allenfalls an der Stärkung des Einsatzes prädikativer kognitiver Strukturen liegen - und zwar bei funktionalen wie bei prädikativen VP. Bei der Lösung der APM-Aufgaben könnte eine (vormals) funktionale VP nur davon profitieren, insoweit sie die vorgegebene prädikative Vorgehensweise lernt und diese dann anwendet, jetzt also prädikativ vorgeht.

Zunächst einmal ist festzuhalten, daß es beim gegenwärtigen Stand der Forschung nicht klar ist, inwieweit Klauers Training in der behaupteten Dimension überhaupt wirkt, erst recht ist experimentell nicht geklärt, wie es dabei den funktionalen (bzw. prädikativen) VP ergeht. Die vorliegenden statistischen Analysen reichen hier zu einer Bewertung nicht aus. Dazu müßte ein neues Forschungsprogramm gestartet werden.

Wie tatsächlich Förderprogramme zum Denken aussehen müßten, einmal zum Training prädikativen Denkens (möglicherweise ein Umbau des Klauerschen Trainings), zum anderen zum Training funktionalen Denkens (nicht in Sicht), ist unklar; zu dem Aspekt, der uns am Denken interessiert, sicher aber nicht solche, in denen Aufgaben durch eine Art von "Auswendiggelerntem" hinbekommen werden sollen, sondern solche, in denen immer wieder Gelegenheiten gegeben werden, um Denken auszuprobieren und so Denken immer wieder in Anwendung zu bringen.

Unsere Erfahrungen aus unseren Experimenten und dem Schulalltag im Mathematikunterricht, in dem wir Kinder über Jahre hinweg beobachten konnten, lassen uns hinsichtlich hochgesteckter Erwartungen einer Stärkung der schwächeren Dimension über die Höhe der anderen Dimension hinaus, zur Vorsicht raten. Zumindest stimmen wir Sternberg zu, der größere Schwierigkeiten in vergleichbaren Projekten sah.

> I doubt that a programm that is of less than a semester in duration is worthy of serious consideration, and I would strongly urge planning that includes at least a year of instruction … If there is one thing we have learned about thinking skills, it is that there is no quick fix. Shorter-term programs may produce increases in test scores by teaching to specific tests; they will not produce long-term gains in thinking skills, nor should they be expected to produce such gains. (Sternberg 1987b, S. 257, zitiert nach Hasselhorn 1995, S. 35)

6.2 Induktives Denken - dualer Ansatz

Wir wollen nun die einseitig prädikativ bestimmte Sichtweise des (Klauerschen) induktiven Denkens aufbrechen und in Anwendung unserer Theorie sowohl prädikatives als auch funktionales induktives Denken postulieren.

Dazu werden wir im folgenden zunächst am Beispiel einer Musterergänzungsaufgabe *ohne* vorgegebene Lösungsmöglichkeiten zwei charakteristische Arten diskutieren, wie man sich diesen Sachverhalt erschließen kann und wie sich dann dadurch bestimmt eine Lösung ergibt.

Beispiel

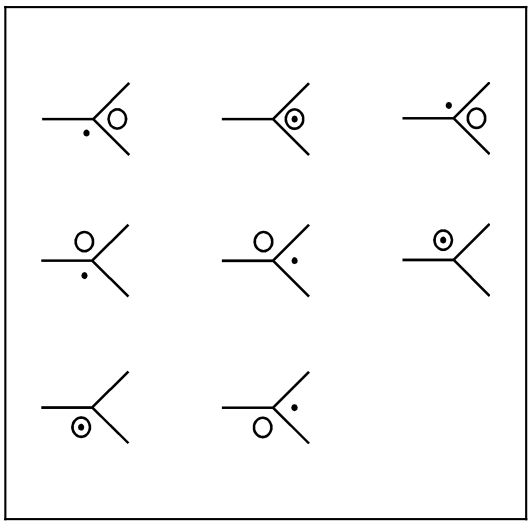


Abb. 3: Beispiel einer Mustergänzungsaufgabe ***ohne*** vorgegebene Lösungsmöglichkeiten (vgl. Raven 1965, Set II, Aufgabe 14 abgeändert)

Als Beispiel wählen wir eine Aufgabe (Abb. 3) aus dem APM-Test von Raven (1965). Die Lösung ist bei uns abweichend von der üblichen Einsatzart allein aus den Vorgaben der Matrix zu konstruieren, d. h. ohne daß dabei Lösungsmöglichkeiten vorgegeben sind. Vorgegebene Lösungsmöglichkeiten könnten stören, insoweit sie sowohl die Sichtung des Problems beeinflussen, als auch die Lösungsfindung vereinfachen und damit weniger Denken erfordern (s. u.).

Es kommt uns weniger darauf an, *welche* Lösung produziert wird, sondern *wie* sie zusammengebastelt wird. Die entscheidende Frage ist: *Was* wird in der Aufgabe gesehen und *wie* wird genau das zur Lösungsproduktion verwendet?

Wie im folgenden vorgeführt wird, ist es sowohl auf *prädikativem* Weg als auch auf *funktionalem* Weg möglich, das mit dieser Art der anspruchsvolleren Musterergänzungsaufgaben gegebene Problem zu sichten, sich dieses zu erschließen und erfolgreich auf eine *passende* bzw. *funktionierende* Lösung zu kommen:

Prädikative Sichtung des Problems und Zurechtlegen einer Lösung:

Die in der Aufgabe gezeigten Objekte werden erfaßt und auf relevante Merkmale hin untersucht. In der Vorlage wird *statisch* ein *Muster* gesehen, das auf Struktur*eigenschaften* hin auseinandergenommen wird: In dieser Konzeption ergibt sich für die Lösungsfigur der Ort des Kreises aus dem prädikativen Betrachten der Zeilen. Dieses führt zu der Erkenntnis, daß das Zutreffen eines Ortsgleichheits-Prädi-

kates vorliegt: zeilenweise bleibt *der Ort des Kreises gleich*. Das Ortsgleichheits-Prädikat kann auch spaltenweise angewendet werden: In diesem Fall bleibt der Punkt am *gleichen* Ort. Das Grundelement "Y" bleibt sowieso offenkundig gleich. Damit ist die Lösungsfigur vollständig bestimmt. Sie paßt in die Landschaft aufgrund der mit der Umgebung übereinstimmenden Merkmale.

Funktionale Sichtung des Problems und Zurechtlegen einer Lösung:

In der Vorlage werden *dynamische Erzeugungsprozeduren* gesucht. Durch das Nacheinanderlesen der ersten Zeile (bzw. Spalte) wird im Kopf ein Produktionsprozeß induziert, der dann an den beiden ersten Feldern der letzten Zeile (Spalte) justiert und in das freie Feld fortgesetzt wird: Zeilenweise *wandert* der Punkt auf einer Kreisbahn durch die "Y"-Felder, damit ergibt sich der Ort des Punktes in der Lösungsfigur als nächstes erreichtes Feld in dem Wanderungsprozeß. Analog ergibt sich die Position des Kreises aus einem spaltenweise gesehenen *Wanderung*sprozeß. Die Einzelelemente der Matrix werden als Kurzfilm gelesen, mental hintereinanderweg organisiert wie als Ausschnitt aus einem Daumenkino. Der Boden "Y" der Wanderungen bleibt jeweils unverändert. Damit ist eine Lösungsfigur vollständig erzeugt, sie funktioniert, da sie sich als Weiterführung der Nachbarn aufgrund einer Konstruktionsprozedur ergibt.

Anmerkungen

Wir bitten um Beachtung dafür, daß es für uns bei der Zuweisung der bevorzugten kognitiven Struktur nicht darum geht, ob jemand in der Lage ist, etwa beiden Lösungswegen zuzustimmen und diese zu verstehen (hier: nachvollziehen zu können), wenn er ihre Vorführung erlebt. Erfolgreicher Nachvollzug ist hier klar von eigenständigem Erfinden zu unterscheiden. Die entscheidende Frage für uns ist, ob dieser jemand selbst "spontan" darauf gekommen wäre, die Lösung gerade so anzusetzen und eben nicht in der anderen Variante.

Eine funktionale Analyse weicht schon dort von einer prädikativen ab, wo es um die *Darstellung* des Sachverhaltes geht: im funktionalen Fall besteht der Sachverhalt in einem Mechanismus, welcher die Abweichung in den einzelnen Mustern erzeugt. Das jeweils nächste Muster wird durch Veränderung des Vorhergehenden erzeugt. Die intellektuelle Leistung besteht im Erfinden und Austesten solcher Veränderungsprozesse (Konstruktionsprozesse, Werkzeuge). Die Klauersche Redeweise "*Logisch betrachtet, läßt sich jeder Sachverhalt, mit dem wir uns beschäftigen können, mit Hilfe von Argumenten und Prädikaten darstellen.*" wird diesem Vorgehen nicht gerecht. Es ist hier unerheblich, ob sich der Sachverhalt so darstellen läßt. Entscheidend ist, ob sich jeder Mensch ihn so vorstellen muß. Das Problemlösen bezieht sich eben nicht auf den (von außen gegebenen) Sachverhalt, sondern auf die mentalen Konstruktionen, mit denen der Sachverhalt eingefangen wird.

Vergleich: klassische Raven-Aufgaben - unsere Variante ohne vorgegebene Lösungsmöglichkeiten

Bei den klassischen Raven-Aufgaben kann die Lösung einfacher als bei uns dadurch erfolgen, daß sie wahrnehmungsorientiert durch Ausgrenzung bestimmt wird. Eine Lösung braucht aus der vorgegebenen Lösungsmenge nur in das Matrix-Muster eingepaßt zu werden, im Zweifelsfall nimmt man das am wenigsten Störende.

Den Unterschied zwischen den beiden Einsatzarten der Musterergänzungsaufgaben kann man sich mathematisch wie folgt klar machen: Bei den klassischen Raven-Aufgaben mit vorgegebenen Lösungsmöglichkeiten reicht es aus, erfolgreiche *Entscheidungs*verfahren dafür zu haben, welches der angebotenen Lösungsmuster paßt. Bei unseren Musterergänzungsaufgaben ohne Angabe von Lösungsmöglichkeiten ist eine *Erzeugungs*prozedur (Aufzählverfahren) gesucht. Solche algorithmisch *aufzählbaren* Mengen haben aber - wie "nachgerechnet" werden kann - ein höheres Komplexitätsmaß als algorithmisch *entscheidbare* Mengen (z. B. Cohors-Fresenborg 1977, S. 45ff). Diese härtere Variante des Denkens wird bei Klauers Einsatz der klassischen Raven-Aufgaben gerade nicht gefordert. Insoweit eignet sich unsere Einsatzart in größerem Ausmaß, Denken zu untersuchen.

Prädikatives versus funktionales induktives Denken

Ausgehend von der Diskussion unseres Beispiels (s. o., Abb. 3) stellen wir in Tab. 1 einem prädikativen induktiven Denken eine funktionale Art induktiven Denkens gegenüber. Zu den in der Literatur vorgefundenen Kennzeichen prädikativen induktiven Denkens lassen sich jeweils funktionale Gegenstükke angeben.

Induktives Denken	
Prädikativ	Funktional
Analyse der Gleichheiten und Unterschiede (z. B. Klauer 1992a, 1993a, Pellegrino 1985)	Analyse von Ruhepositionen und Bewegung
Feststellen und Vergleich von Eigenschaften (z. B. Klauer 1992a, 1993a, Pellegrino 1985, Sternberg 1987a)	Erkennen und Anwenden von Prozessen
Feststellen von Relationen zwischen dargebotenen Elementen (z. B. Klauer 1992a, 1993a, Pellegrino 1985, Sternberg 1987a)	Feststellen eines Zusammenhanges zwischen dargebotenen Elementen in Form einer Entstehungsgeschichte
Schließen vom Besonderen auf das Allgemeine (z. B. Lüer & Spada 1992, Pawlik 1971, Sternberg 1985)	Fortsetzen induzierter Prozesse
Logische Komposition von Prädikaten	Verkettung von Prozessen

Tab. 1: Prädikatives versus funktionales induktives Denken

Damit haben wir herausgearbeitet, daß es sowohl eine prädikative als auch eine funktionale erfolgreiche Vorgehensweise bei den APM-Aufgaben geben kann und auf diese Weise eine mögliche Antwort auf das Rätsel der guten Testleistungen funktionaler VP gefunden: Nicht nur eine prädikative, sondern auch eine funktionale Vorgehensweise kann gute Ergebnisse im APM-Test ermöglichen. Es bleibt die Frage, ob es auch tatsächlich VP gibt, die solche Aufgaben funktional lösen, und andere, die dabei prädikativ vorgehen, sowie die weiterreichende Frage, ob die Präferenz für eine der beiden kognitiven Strukturen bereichsübergreifend ist, d. h. vor dem Hintergrund unseres inhaltlichen Interesses insbesondere, ob diejenigen VP, die sich bei unseren Programmieraufgaben funktional (bzw. prädikativ) erweisen, sich in gleicher Weise auch bei Musterergänzungsaufgaben verhalten.

6.3 Eigene Pilotuntersuchungen zu Denkprozessen bei der Lösung von Musterergänzungsaufgaben

Untersuchungsmaterial und -art

Bislang haben wir als zu kommentierende Musterergänzungsaufgaben einfach die Aufgaben des APM-Tests von Raven (ohne Lösungsauswahl und ohne Einrahmung des Lösungsfeldes) übernommen (SET I zuzüglich einiger Aufgaben aus SET II in Jahrgangsstufe 3, Grundschule; SET II bei Gymnasiasten der Jahrgangsstufe 7 und Erwachsenen an der Universität). Da sich in der Angabe eines Lösungsmusters (ausgewählt aus einer vorgegebenen Lösungsmenge) nicht die Überlegungen widerspiegeln, die zur Entscheidung führten, bringt es nichts, Musterergänzungsaufgaben wie üblich im Experiment einzusetzen und aufgrund einer vorgegebenen Lösungsmenge nur die Antworten zu erheben. Vielmehr ist es nötig, von einer VP die Lösungsfiguren selbst produzieren zu lassen und die von ihr gefundene Lösung dahingehend kommentieren zu lassen, warum sie in ihren Augen denn gerade so gut paßt. Außerdem erhöht sich auf diese Weise wie oben ausgeführt die Anforderung an das Denken.

Die Untersuchung mit zu kommentierenden Musterergänzungsaufgaben wird von uns als klinisches Interview mit einzelnen VP ca. 45 min lang durchgeführt. Die Untersuchungsstunden werden mit Video aufgezeichnet.

Datenerhebung und Auswertung

Die Datenerhebung erfolgt als Transkription der Lösungsargumentationen vom Videoband. Aufgrund der deiktischen Ausdrucksweise sind zahlreiche nonverbale Anteile mitaufzunehmen. Gelegentlich ist die Reihenfolge bei der zeichnerischen Konstruktion der Lösungsfigur von Bedeutung und muß mit erfaßt werden.

Die Analyse von Transkripten ist mittlerweile in breiteren Kreisen als Auswertungsmethode anerkannt. In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik hat sich hier insbesondere die interpretative Unterrichtsforschung profiliert und zahlreiche Veröffentlichungen hervorgebracht. Während bei ihr die Sozialwissenschaften einen Bezugsrahmen bilden (Klasse als Mikrokultur), suchen wir mit unseren Einzeluntersuchungen zu individuellen Erscheinungsformen und Ausprägungen mathematischen Denkens Orientierung in der Kognitionspsychologie. Infolge spielen unterschiedliche Aspekte an den Transkripten eine wichtige Rolle: z. B. Aufspüren sozialer Interaktionsmuster versus Rekonstruktion der Genese eines Begriffs beim Individuum oder Art der kognitiven Orientierung. Vorbildlich für uns sind die analytischen Arbeiten, die in der Gruppe um Steffe und von Glasersfeld entstanden sind (z. B. Steffe, von Glasersfeld, Richards & Cobb 1983). Im deutschsprachigen Raum sind insbesondere die grundlegenden Arbeiten in der Gruppe um Maier und seinen Kollegen zu nennen (z. B. Beck & Maier 1994). Xu (1994) dürfte mit ihrer Arbeit, die sie in unserer Forschungsgruppe leistete, die bezüglich der Entwicklung von grundlegenden Begriffen der Programmierung feinste Analyse mit Hilfe eines ausgefeilten Kategoriensystems zur Erfassung der mathematischen und psychologischen Aspekte der Erscheinungen, in denen Aspekte der Begriffe auftauchen, erbracht haben.

Beispiele für Lösungsargumentationen zur o.g. Aufgabe:

VP1: In jeder Reihe sind zwei Kreise; die liegen beidemal hier [1. Zeile] zwischen den Ästen und hier [2. Zeile] oben und hier [3. Zeile] liegen sie unten. Also würde ich den Kreis hier unten hinmalen [Ergebnisfeld]. Dann, die Punkte, würde ich so runtergehen. Da [1. Spalte] liegen die beiden in diesem Dreieck, im unteren, hier [2. Spalte] liegen sie zwischen dieser Gabelung und dann würde ich diesen hier oben hinzeichnen.

VP2: Der Punkt hüpft einmal rum [zeilenweise], wenn ich die Spalten runtergehe. Der Kreis - macht einmal den Prozeß, und in der Zeile macht der Punkt den Prozeß.

Die Transkripte werden analysiert hinsichtlich des logischen Typs der benutzten Argumente:

a) Anwendung von Prädikaten, d. h. Ermitteln der statischen Aspekte mittels Zugriff über eine Verbaletikettierung der Situation (Goethesche "Benamsung"), dieses kann sich in einer besonderen Reichhaltigkeit der gebrauchten Worte bemerkbar machen, oder

b) über Funktionen, d. h. Ermitteln der dynamischen Aspekte und Ausnutzen von in die Lage induzierten Prozessen, dabei werden diese eher durch Gestik (Handbewegung) angedeutet, als daß ihnen ein Name verpaßt wird.

In den angeführten Beispielen ergibt sich folgendes:

Im ersten Fall (VP1) wird eine prädikative Argumentation zuerkannt, weil die VP die Struktur der Aufgabe unter Benennung der Anteile schildert: die Kreise *liegen beidemal* zwischen den *Ästen*, hier *oben*, hier *unten*. Da liegen die *beiden* in diesem *Dreieck*, im *unteren* liegen sie *zwischen* dieser *Gabelung*. Im zweiten Fall (VP2) wird eine funktionale Argumentation zuerkannt, weil die VP einen zweimal anwendbaren Prozeß ansetzt, der ihr die Lösungsfigur erzeugt: Der Punkt *hüpft* einmal rum, der Kreis *macht* einmal den *Prozeß*, und in der Zeile *macht* der Punkt den *Prozeß*.

Ergebnisse

Mit den bisher erfolgten Pilotstudien (zunächst mit Kollegen, wiss. Mitarbeitern und studentischen Hilfskräften, dann mit den Teilnehmern/innen an zwei von uns in der Grundschule, Jahrgangsstufe 3, durchgeführten Mathematischen Arbeitsgemeinschaften, sowie Teilnehmer/innen der Mathematischen Schülergesellschaft der Humboldt-Universität, Berlin) konnten wir den Existenzbeweis erbringen, daß es bei der Lösung der Aufgaben sowohl typischerweise prädikativ vorgehende wie auch typischerweise funktional vorgehende VP gibt.

Unsere einschlägigen, während der Durchführung von drei halbjährigen mathematischen Arbeitsgemeinschaften in der Grundschule gewonnenen Erfahrungen veranlassen uns zur Annahme, daß eine gewisse Konstanz im kognitiven Verhalten erwartet werden kann beim Wechsel von Konstruktionen von Maschinen mit dem Baukasten "Dynamische Labyrinthe" zur Bearbeitung von unseren Mustergänzungsaufgaben.

Neben der Tatsache, daß Klauer von der logisch falsch begründeten Annahme einer einseitig prädikativen geistigen Auseinandersetzung ausgeht, kann mit dieser neuen Untersuchungsart der zu kommentierenden Mustergänzungsaufgaben gezeigt werden, daß er auf diese Weise auch nicht dem realen Verhalten eines großen Teils der VP gerecht werden kann.

7. Ausblick

Wir gehen von einer Theorie aus, in der zwischen einer prädikativen und einer funktionalen kognitiven Struktur unterschieden wird. Es haben sich Hinweise darauf ergeben, daß die von uns getroffene Unterscheidung der beiden kognitiven Strukturen auch in Bereichen außerhalb der Mathematik sinnvoll sein kann, um unterschiedliches Verhalten zu erklären. Der Neuigkeitswert für die Psychologie ist insbesondere in der nachweisbaren Existenz des Funktionalen zu sehen. Die bisher durchgeführten Studien waren stark auf die Verwendung interpretativer Untersuchungsmethoden ausgerichtet. Dabei gelten die für diese Methoden bekannten Einwände. Außerdem war es mit den uns bisher nur sehr beschränkt zur Verfügung stehenden Personalmitteln nicht möglich, eine Untersuchungspopulation mit mehreren unterschiedlichen Untersuchungsinstrumenten zu beobachten.

Ziel zukünftiger Projekte müßte es sein, im methodischen Teil die Versuchsanordnungen soweit zu vervollkommnen und in Experimenten zu testen, daß die Zuweisung zu einer benutzten kognitiven Struktur auch aufgrund von quantitativen Auswertungsmethoden möglich wird. Im inhaltlichen Bereich sollte das Untersuchungsinstrumentarium in einem nächsten Schritt sowohl Programmieraufgaben als auch Aufgaben zur Mustergänzung enthalten, welche vom Inhalt her nicht mathematisch sind, sondern in den Bereich des allgemeinen Denkens fallen. Es wäre notwendig, daß die Untersuchungen zu beiden Bereichen an der gleichen Untersuchungspopulation durchgeführt werden. Darüberhinaus würde es sich anbieten, mit der gleichen Untersuchungspopulation einen Test zum visuellen/räumlichen Vorstellungsvermögen durchzuführen. Damit könnte der Stellenwert des Konstrukts "visuelles/räumliches Vorstellungsvermögen" vor dem Hintergrund unserer Theorie der prädikativen versus funktionalen kognitiven Strukturen (ähnlich wie das Konstrukt "induktives Denken") neu überdacht werden.

Wenn sich die von uns erwartete Konstanz des kognitiven Verhaltens bei den Programmieraufgaben und den Mustergänzungsaufgaben bestätigen würde, könnten wir unsere These untermauern, daß die Unterscheidung zwischen prädikativen und funktionalen kognitiven mentalen Modellierungen sich als weiterreichendes Konstrukt bei der Analyse allgemein intelligenten Verhaltens bewährt.

Die Möglichkeit einer theoretischen Unterscheidung zwischen prädikativer versus funktionaler kognitiver Struktur eröffnet Chancen, die unter Berücksichtigung bisheriger kognitiver Modelle oftmals nur als eigentümliches Verhalten oder Brüche im intellektuellen Systemzusammenhang wahrgenommenen Merkwürdigkeiten auf eine typische Andersartigkeit zurückzuführen. Die Bedeutung der Feststellung über die kognitiven Strukturen hat sich schon bisher in jüngeren Schulversuchen des Niedersächsischen Kultusministeriums gezeigt (z. B. Cohors-Fresenborg & Kaune 1993). Die von uns erwarteten geschlechtsspezifischen Unterschiede haben unmittelbar Auswirkungen auf die Ausgestaltung von Unterricht im mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich.

Die neuen multimedialen Welten werden Repräsentationsformen bereitstellen, in denen die (bislang in der Wissenschaftssprache vernachlässigten) funktionalen Denkansätze sich dadurch entfalten können, daß hier Ideen prozeßorientierten Denkens unmittelbar umgesetzt werden können.

8. Danksagung

Mein Dank gilt den Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Herbsttagung des GDM-Arbeitskreises "Psychologie und Mathematikunterricht", insbesondere Elmar Cohors-Fresenborg und Jürgen Diederich, sowie den Teilnehmerinnen und Teilnehmern der Oberwolfach-Tagung "New Trends in the Teaching and Learning of Mathematics", hier insbesondere Werner Hartmann, Jurg Kramer und David Tall, die durch ihre zahlreichen Kritikpunkte und konkreten Anregungen zur Klärung der vorgestellten theoretischen Konzeption beigetragen haben.

9. Literatur

Aebli, H. (1980): Denken das Ordnen des Tuns - Kognitive Aspekte der Handlungstheorie. Stuttgart: Klett-Cotta.

Aebli, H. (1981): Denken das Ordnen des Tuns - Denkprozesse. Stuttgart: Klett-Cotta.

Anderson, J. (1993): Rules of the mind. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Bateson, G. (1995[4]): Geist und Natur: eine notwendige Einheit. Frankfurt: Suhrkamp.

Beck, C. & Maier, H. (1994): Mathematikdidaktik als Textwissenschaft. Zum Status von Texten als Grundlage empirischer mathematikdidaktischer Forschung. *Journal für Mathematikdidaktik*. 15-1/2, 35-78.

Beck, M., Lüttmann, B. & Rogalla, U. (1993): Wenn Du denkst, Du denkst ... Eine Untersuchung der Effektivität des Klauer'schen Denktrainings. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie*. Bd. XXV, Heft 4, 297-306.

Bischof, N. (1979): Der biologische Sinn der Zweigeschlechtlichkeit. In E. Sullerot (Hrsg.), Die Wirklichkeit der Frau. 38-60. München: Steinhausen.

Bischof, N. (1995): Struktur und Bedeutung - Eine Einführung in die Systemtheorie. Bern: Huber.

Bischof-Köhler, D. (1990): Frau und Karriere in psychobiologischer Sicht. *Zeitschrift für Arbeits- und Organisationspsychologie*. 17-28.

Börger, E. (1986[2]): Berechenbarkeit, Komplexität, Logik. Braunschweig: Vieweg.

Börger, E., Grädel, E. & Jurevich, Y. (im Druck): The decision problem. Berlin: Springer.

Cohors-Fresenborg, E. (1977): Mathematik mit Maschinen und Kalkülen. Braunschweig: Vieweg.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (1993): Zur Konzeption eines gymnasialen mathematischen Anfangsunterrichts unter kognitionstheoretischem Aspekt. *Der Mathematikunterricht*. 39, 3, 4-11.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (im Druck): Understanding the limit concept: Beginning with a coordination process schema. *Journal of Mathematical Behavior*.

Davis, M. (1965): The undecidable. Basic Papers on undecidable propositions, unsolvable and computable functions. New York: Raven Press.

Davis, M. (1982): Why Gödel didn't have Church's theses. *Information and Control*, 54, 3-24.

Davis, R. B. (1984): Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education. New Jersey: Ablex publishing Corp.

Davis, R. B. (1992): Understanding "Understanding". *Jounal of Mathematical Behavior*. Vol. 11, 225-241.

Dodge, R. (1896): Die motorischen Wortvorstellungen. Halle: Max Niemeyer.

Dörner, D. (1973): Grundmuster begrifflicher Strukturen und eine Strategie der Unterrichtsforschung. In K. Frey & M. Lang (Hrsg.), Kognitionspsychologie und naturwissenschaftlicher Unterricht - Cognitive processes and science instructions. 79- 91. Bern: Huber.

Dörner, D. (1976): Problemlösen als Informationsverarbeitung. Stuttgart: Kohlhammer.

Dörner, D. (1989): Die kleinen grünen Schildkröten und die Methoden der experimentellen Psychologie. *Sprache & Kognition*. Heft 2, 86-97.

Dubinsky, E. (1991): Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (ed.), Advanced mathematical thinking. 95-126. Dordrecht: Kluwer.

Duncker, K. (1935): Zur Psychologie des produktiven Denkens. Berlin: Springer.

Eisentraut, R. (1994): Unterlagen beim Konzipieren und Entwerfen: Welche Darstellungen nutzen Konstrukteure? In G. Höhne et al. (Hrsg.), Konsequenzen begrifflicher und bildlicher Repräsentationen für die Didaktik der Konstruktionslehre. Bericht über das Werkstattgespräch 'Bild und Begriff' II. Ilmenau: Technische Universität.

Eisentraut, R. (im Druck): Vorstellungen im Konstruktionsprozeß. In W. Hacker (Hrsg.), Zur Rolle von Anschauung und Abstraktion im konstruktiven Entwurfsprozeß. Bericht über das Werkstattgespräch 'Bild und Begriff' III. Dresden: Technische Universität.

Engelkamp, J. (1990): Das menschliche Gedächtnis. Göttingen: Hogrefe.

Engelkamp, J. & Zimmer, H. (1985): Motor programs and their relations to semantic memory. *The German Journal of Psychology*. Vol. 9, 3, 239-254.

Hadamard, J. (1954): The psychology of invention in the mathematical field. New York: Dover.

Hager, W. (Hrsg.) (1995): Programme zur Förderung des Denkens bei Kindern - Konstruktion, Evaluation und Metaevaluation. Göttingen: Hogrefe.

Hager, W. & Hasselhorn, M. (1993): Evaluation von Trainingsmaßnahmen am Beispiel von Klauers Denktraining für Kinder. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie*. Bd. XXV, Heft 4, 307-321.

Hager, W. & Hasselhorn, M. (1995a): Konzeption und Evaluation von Programmen zur kognitiven Förderung: theoretische Überlegungen. In W. Hager (Hrsg.): Programme zur Förderung des Denkens bei Kindern - Konstruktion, Evaluation und Metaevaluation. 50-85. Göttingen: Hogrefe.

Hager, W. & Hasselhorn, M. (1995b): Induktives Denken und die Aufgaben des Denktrainings für Kinder I. In W. Hager (Hrsg.): Programme zur Förderung des Denkens bei Kindern - Konstruktion, Evaluation und Metaevaluation. 208-228. Göttingen: Hogrefe.

Hartmann, W. (im Druck): Warum man Extremalaufgaben anders lösen sollte! *Praxis der Mathematik*.

Hasselhorn, M. (1995): Kognitive Trainings: Grundlagen, Begrifflichkeiten und Desiderate. In W. Hager (Hrsg.): Programme zur Förderung des Denkens bei Kindern - Konstruktion, Evaluation und Metaevaluation. 14-40. Göttingen: Hogrefe.

Hasselhorn, M. & Hager, W. (1995): Transferwirkungen dreier Programme zur kognitiven Förderung bei Kindern. Reinterpretation zweier Evaluationsexperimente. In W. Hager (Hrsg.): Programme zur Förderung des Denkens bei Kindern - Konstruktion, Evaluation und Metaevaluation. 309-337. Göttingen: Hogrefe.

Hermes, H. (1971[2]): Aufzählbarkeit, Entscheidbarkeit, Berechenbarkeit. Heidelberg: Springer.

Hoffmann, J. (1990): Über die Integration von Wissen in die Verhaltenssteuerung. *Schweizerische Zeitschrift für Psychologie.* 49/4, 250-265.

Hoffmann, J. (1992): Probleme der Begriffsbildungsforschung: Von S-R Verbindungen zu S-R-K Einheiten. *Sprache & Kognition*. 11, 223-238.

Hoffmann, J. (1993): Vorhersage und Erkenntnis - Die Funktion von Antizipationen in der menschlichen Verhaltenssteuerung und Wahrnehmung. Göttingen: Hogrefe.

Hoffmann, J. (1994): Die visuelle Identifikation von Objekten. In W. Prinz & B. Bridgeman, Wahrnehmung. Enzyklopädie der Psychologie. C.II.1., 391-456. Göttingen: Hogrefe.

Holland, J., Holyoak, K., Nisbett, R. & Thagard, P. (1986): Induction: Process of inference, learning and discovery. Cambridge: MIT Press.

James, W. (1975): Pragmatism and the meaning of truth. Cambridge: Havard University Press.

Kelly, G. A. (1969): Clinical psychology and personality. New York: John Wiley & Sons.

Klauer, K. J. (1989): Denktraining für Kinder I - Ein Programm zur intellektuellen Förderung. Handanweisung. Göttingen: Hogrefe.

Klauer, K. J. (1991a): Denktraining für Kinder II - Ein Programm zur intellektuellen Förderung. Handanweisung. Göttingen: Hogrefe.

Klauer, K. J. (1991b): Erziehung zum induktiven Denken - Neue Ansätze der Denkerziehung. *Unterrichtswissenschaft*. Themenheft: Induktives Denken. 19, Heft 2, 135-151.

Klauer, K. J. (1992a): Problemlösestrategien im experimentellen Vergleich: Effekte einer allgemeinen und einer bereichsspezifischen Strategie. In H. Mandl & H. F. Friedrich (Hrsg.): Lern- und Denkstrategien - Analysen und Intervention. 57-78. Göttingen: Hogrefe.

Klauer, K. J. (1992b): "Bottom up" oder "top down"? Über die Transferwirkungen zweier Strategien zum Training des induktiven Denkens. *Sprache & Kognition*. 11, Heft 2, 91-103.

Klauer, K. J. (1993a): Training des induktiven Denkens. In K. J. Klauer (Hrsg.), Kognitives Training. 141-163. Göttingen: Hogrefe.

Klauer, K. J. (1993b): Über den Einfluß eines Trainings zum induktiven Denken auf den Erwerb und die Nutzung der Lernstrategie des "Networking". *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie*. Bd. XXV, Heft 4, 333-352.

Klauer, K. J. (1993c): Induktives Denken beeinflußt das Rechtschreiblernen. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie*. Bd. XXV, Heft 4, 353-365.

Klauer, K. J. (1993d): Über die Auswirkungen eines Trainings zum induktiven Denken auf zentrale Komponenten der Fremdsprachenlernfähigkeit. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*. 7, Heft 1, 1-9.

Klauer, K. J. (1993e): Denktraining für Jugendliche. Göttingen: Hogrefe.

Klauer, K. J. (1994): Transferiert der Erwerb von Strategien des induktiven Denkens auf das Erlernen eines schulischen Lehrstoffs? *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*. 8, Heft 1, 15-25.

Klauer, K. J. (1995): Antworten und neue Befunde. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*. 9, Heft 1, 13-23.

Klauer, K. J. (1996a): Teaching inductive reasoning: some theory and three experimental studies. *Learning and Instruction*, Vol. 6, No. 1, 37-57.

Klauer, K. J. (1996b): Denktraining oder Lesetraining? Über die Auswirkungen eines Trainings zum induktiven Denken sowie eines Lesetrainings auf Leseverständnis und induktives Denken. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie*. Bd. XXVIII, Heft 1, 67-89.

Klix, F. (1976): Information und Verhalten. Berlin: Verlag der Wissenschaften.

Klix, F. (1984): Über Wissensrepräsentationen im menschlichen Gedächtnis. In F. Klix (Hrsg.), Gedächtnis, Wissen, Wissensnutzung. 9-73. Berlin: Verlag der Wissenschaften.

Klix, F. (1992): Die Natur des Verstandes. Göttingen: Hogrefe.

Köhler, W. (1921): Intelligenzprüfungen an Menschenaffen. Berlin: Springer.

Körner, S. (1977): Erfahrung und Theorie - Ein wissenschaftstheoretischer Versuch. Frankfurt: Suhrkamp.

Lersch, P. (1970[11]): Aufbau der Person. München: Johann Ambrosius Barth.

Lüer, G. (1973): Gesetzmäßige Denkabläufe beim Problemlösen. Weinheim: Beltz.

Lüer, G. & Spada, H. (1992): Denken und Problemlösen. In H. Spada (Hrsg.), Lehrbuch Allgemeine Psychologie. 189-280. Bern: Huber.

Masendorf, F. & Klauer, K. J. (1986): Gleichheit und Verschiedenheit als kognitive Kategorien: Experimentelle Überprüfung durch ein Intelligenztraining bei lernbehinderten Kindern. *Pädagogische Psychologie*. XVIII/1, 46-55.

Metzger, W. (1954): Psychologie. Die Entwicklung ihrer Grundannahmen seit der Einführung des Experiments. Darmstadt: Steinkopff.

Paivio, A. (1986): Mental representations. A dual coding approach. New York: Oxford University Press.

Papert, S. (1980): Mindstorms - Children, computers, and powerful ideas. Brighton: The Harvester Press Ltd..

Pawlik, K. (1971[2]): Dimensionen des Verhaltens. Bern: Huber.

Pellegrino, J. W. (1985): Inductive reasoning ability. In R. J. Sternberg (ed.), Human abilities. An information processing approach. 195-226. New York: Freeman.

Raven, J. C. (1965): Advanced progressive matrices, Sets I und II. London: Lewis.

Schwank, I. (1986): Cognitive structures of algorithmic thinking. In Proceedings of the 10th International Conference for the Psychology of Mathematics Education. 195-200. London: University of London, Institute of Education.

Schwank, I. (1990a): Theoretische Grundlagen der Untersuchung und Interpretation ihrer Ergebnisse. In I. Schwank (Hrsg.), Zur algorithmischen Begriffsbildung von Mädchen. Abschlußbericht Bd. I. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schwank, I. (1990b): Zur Analyse kognitiver Strukturen algorithmischen Denkens. In K. Haussmann & M. Reiss (Hrsg.), Mathematische Lehr-Lern-Denkprozesse. 31-54. Göttingen: Hogrefe.

Schwank, I. (1993a): Verschiedene Repräsentationen algorithmischer Begriffe und der Aufbau mentaler Modelle. *Der Mathematikunterricht.* 39, 3, 12-26.

Schwank, I. (1993b): On the analysis of cognitive structures. *Journal of Mathematical Behavior*. 12, 2, 209-231.

Schwank, I. (1994): Zur Analyse kognitiver Mechanismen mathematischer Begriffsbildung unter geschlechtsspezifischem Aspekt. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 2, 31-40.

Schwank, I. (1995): Die Bedeutung von Mikrowelten für den Erwerb mathematischer Begriffe. In H. G. Steiner & H. J. Vollrath (Hrsg.): Neue problem- und praxisbezogene Ansätze in der mathematikdidaktischen Forschung. IDM-Reihe: Untersuchungen zum Mathematikunterricht. Bd. 20. 119-127. Köln: Aulis.

Schwank, I. (1996): Dynamische Labyrinthe als Propädeutik für die formale Programmierung - Konzeption und Handreichungen für eine mathematische Arbeitsgemeinschaft in der Grundschule (3. Klasse). Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Seel, N. M. & Dinter F. R. (1991): Induktives Denken und Analogiebildung. *Unterrichtswissenschaft*. 19, 2, 98-110.

Sfard, A. (1991): On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics.* 22, 1-36.

Steffe, L., von Glasersfeld, E., Richards, J. & Cobb, P. (1983): Children's Counting Types. New York: Praeger.

Sternberg, R. J. (1985): Beyond IQ. A triarchic theory of human intelligence. Cambridge MA: Cambridge University Press.

Sternberg, R. J. (1987a): Teaching intelligence: The application of cognitive psychology to the improvement of intellectual skills. In J. B. Baron & R. J. Sternberg (eds.), Teaching thinking skills: Theory and practice. 182-218. New York: Freeman.

Sternberg, R. J. (1987b): Questions and answers about the nature and teaching of thinking skills. In J. B. Baron & R. J. Sternberg (eds.), Teaching thinking skills: Theory and practice. 251-259. New York: Freeman.

Surányi, J. (1959): Reduktionstheorie des Entscheidungsproblems. Berlin: Verlag der Wissenschaften.

Tall, D. (1994): Understanding the process of advanced mathematical thinking. Preprint of the invited ICMI lecture at the *International Congress of Mathematicians*, Zürich. Coventry: University of Warwick.

Tall, D. (1996): Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. Preprint. Coventry: University of Warwick.

Tello, E. R. (1991): Object-oriented programming for windows. New York: John Wiley & Sons.

Turkle, S. & Papert, S. (1993): Styles and voices. *For the learning of mathematics.* 13/1, 49-52.

van der Waerden, B. L. (1954): Denken ohne Sprache. In G. Révész (ed.), Thinking and Speaking, 165-174. Amsterdam: North-Holland.

Vollrath, H.-J. (1989): Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*. 10, 3-37.

von Glasersfeld, E. (1987): Lernen als konstruktive Tätigkeit. In: E. v. Glasersfeld: Wissen, Sprache und Wirklichkeit. Braunschweig: Vieweg.

von Glasersfeld, E. (1987): Siegener Gespräche über Radikalen Konstruktivismus. In S. Schmidt (Hrsg.), Der Diskurs des Radikalen Konstruktivismus. 401-440. Frankfurt: Suhrkamp.

von Glasersfeld, E. (1995): Radical constructivism: A way of knowing and learning. London: The Falmer Press.

von Harten, G., Jahnke, H. N., Mormann, T., Otte, M., Seeger, F., Steinbring, H. & Stellmacher, H. (1986): Funktionsbegriff und funktionales Denken. Köln: Aulis.

Waldmann, M. & Weinert, F. (1990): Intelligenz und Denken - Perspektiven der Hochbegabungsforschung. Göttingen: Hogrefe.

Wittrock, M. C. (1988): A constructive view of research on learning strategies. In C. E. Weinstein, E. T. Goetz & A. P. Alexander (eds.), Learning and study strategies. Issues in assessment, instruction, and evaluation. 287-297. San Diego: Academic Press.

Xu, B. Y. (1994): Untersuchung zu prädikativen und funktionalen kognitiven Strukturen chinesischer Kinder bei der Auseinandersetzung mit Grundbegriffen der Programmierung. Dissertation. Universität Osnabrück.