[Rainer Kaenders]

Wat algebra is, dat kun je niet weten

$$x \to 5x^2$$

figuur 1 Pijlnotatie (blz. 13)

Paul Drijvers (red.)
Wat a is, dat kun je niet weten / een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school
Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht, 2006
ISBN 90-70786-00-1
200 pagina's, prijs € 15,00

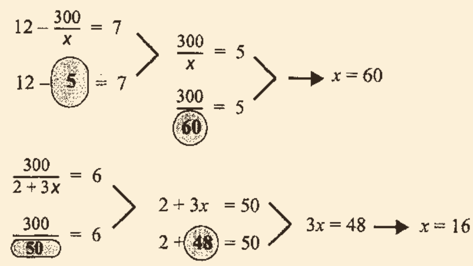
Inleiding

Zeer verschillende aspecten van algebraonderwijs in Nederland vormen de inhoud van het boek 'Wat *a* is, dat kun je niet weten'. Het spectrum reikt van vmbo tot vwo, van maatschappij- tot natuurprofielen en van basisschool tot de bovenbouw van het voortgezet onderwijs, met of zonder de inzet van ICT. Het boek bestaat uit negen hoofdstukken met een nawoord, elk geschreven door één, twee of drie van de acht auteurs: Dekker, Dolk, Drijvers, Goddijn, Kindt, Van der Kooij, Van Reeuwijk, Wijers, allemaal al vele jaren werkzaam op het Freudenthal Instituut (FI). Het boek is een samenstelling van de vruchten die op het FI in de loop van de laatste decennia zijn ontkiemd en gegroeid. Het betreft voornamelijk een aantal aansprekende concrete voorbeelden – van stippenpatronen tot algebrapijlen – waarmee wiskundige vaardigheden en inzichten uitgelegd en begrepen kunnen worden door de creatie van patronen, representaties en contexten. Wiskundige begrippen en vaardigheden worden zo voor leerlingen van verschillende pluimage van betekenis voorzien en worden in relatie met andere al dan niet wiskundige contexten gezet (in de zin van Freudenthals didactische fenomenologie; zie [2]). Wiskundig-didactische, toepassingsgerichte en historische aspecten spelen hierbij een rol en worden ook in het boek besproken.

Schoolwiskunde

Het is erg jammer dat bij dit overzicht van mogelijkheden om algebra uit te leggen, te begrijpen en in de vingers te krijgen, het uiteindelijk kunstmatige en provisorische perspectief van een 'schoolwiskunde' de boventoon voert. Deze 'schoolwiskunde' onderscheidt zich bewust van de cultuurhistorisch gegroeide wiskunde en bezit hierdoor weinig relevantie voor het leven buiten school. De auteurs van de inleiding, Drijvers, Goddijn en Kindt, citeren bijvoorbeeld in hun zoektocht naar wat algebra is of zou kunnen zijn, de natuur- en sterrenkundige Eric Weisstein van het softwarebedrijf Wolfram Research: 'One use of the word "algebra" is the abstract study of number systems and operations within them, including such advanced topics as groups, rings, invariant theory, and cohomology. This is the meaning mathematicians associate with the word "algebra". (…).' En nadat er zulke moeilijke woorden zijn gebruikt, stellen de auteurs de lezer onmiddellijk weer gerust: 'Algebra is dus tot wel wat meer uitgegroeid: het onderzoeken van getalsystemen en hun operaties, waar heel geavanceerde vormen van bestaan. Ergens tussen het jaar 850 en 2000 is de schoolalgebra echter een eigen weg gegaan, want van de algebra volgens de moderne definitie vinden we in het voortgezet onderwijs niet veel meer terug.' Zij vergeten er echter bij te zeggen dat deze bewuste scheiding tussen twee soorten algebra wel heel erg dicht bij het jaar 2000 en onder sterke invloed van een bepaald instituut in Utrecht tot stand is gekomen. Het is juist een kenmerk van moderne onderwijssystemen dat veranderingen in de (wetenschappelijke) cultuur hun neerslag in het onderwijs horen te vinden. Uiteraard gebeurde dat in het verleden niet altijd snel, maar wel was het uiteindelijk de bedoeling. Het Freudenthal Instituut dat sinds enkele decennia voor ministerie, hogescholen en universiteiten dé centrale plaats in de Nederlandse wiskundedidactiek inneemt, geeft dit streven blijkbaar op. 'Kunnen wij voor de afbakening van de schoolalgebra iets leren van de professionals met hun structuren? Op dit moment niet echt veel', gaan de drie auteurs verder en constateren dat na de ervaringen met New Math de tijd van een inbreng vanuit de academische wiskundige gemeenschap, zonder dat er vanuit het onderwijs echt behoefte aan is, nu definitief voorbij zou zijn.

Daarbij blijkt bijvoorbeeld uit het feit dat op blz. 13 de pijlnotatie (zie ***figuur 1***) voor afbeeldingen aan de New Math beweging wordt toegeschreven terwijl deze notatie door wiskundigen al veel vroeger werd gebruikt, dat er niet wordt beseft dat ook 'New Math' een stroming van het onderwijs was die een kunstmatige schoolwiskunde creëerde met weinig werkelijke relevantie zoals juist vele vertegenwoordigers van de moderne structuurwiskunde toen al met grote zorg constateerden; zie bijvoorbeeld in [1, pp. 189-193] het door 65 vooraanstaande Noordamerikaanse wiskundigen ondertekende memorandum. En het was juist Freudenthal die New Math als stroming van het onderwijs met weinig relevantie voor de echte wiskunde ontmaskerde (zie [4]): 'Es ist das alte Lied der zwei Mathematiken; neben der seriösen eine Schulmathematik, ein Storchenmärchen. Nur kann dieses Storchenmärchen die richtige Mathematik unmöglich machen.' Enfin, de door Freudenthal hevig bekritiseerde historisch onjuiste identificatie van de moderne structuurwiskunde met de onderwijsbeweging 'New Math' wordt door zijn volgelingen kritiekloos voortgezet, met de eveneens door Freudenthal geschetste twijfelachtige gevolgen voor het leren van een werkelijke wiskunde die haar relevantie aan meer dan alleen de praktijk in het voortgezet onderwijs ontleent.



figuur 3 Bordjesmethode (blz. 116)

Tien geboden

Wat 'schoolalgebra' tegenwoordig is, maken de auteurs van de inleiding dan dus ook zelf uit via zoiets als tien geboden voor de algebra op school: 1. *Er wordt impliciet of expliciet gegeneraliseerd.* 2. *Patronen van getalsverbanden en/of formules worden onderzocht.* enzovoorts. Zoals het een goede catechismus betaamt wordt nu gekeken naar wat aan deze tien geboden wel of niet voldoet:

- *Het uitrekenen van* 123 + 567*: geen algebra.*
- *Het uitrekenen van* 101 × 99*, uitgaande van* 100 × 100*: algebra.*
- *Weten dat* -1 × -1 = +1*: geen algebra. Min keer min is plus: wel algebra.*

En zo volgen er nog acht andere gevallen van wel of niet algebra die het verlenen van bestaansrecht aan de 'schoolalgebra' ondersteunen. De praktijk van deze schoolalgebra die we op scholen zien, werkt met begrippen als 'productfunctie' (zie ***figuur 2*** en bijvoorbeeld 'Moderne wiskunde') waarbij van een functie niet kan worden uitgemaakt of het om een 'productfunctie' gaat of niet. Door het gebrek aan goede definities zijn de argumenten van deze schoolalgebra niet noodzakelijk dezelfden als in de wiskunde zelf. Didactisch behulpzame en zinvolle voorstellingen als de zogenaamde '*bordjesmethode*' (zie ***figuur 3***), '*pijlenkettingen*' (zie ***figuur 4***) of '*getallenstroken*' (zie ***figuur 5***) worden niet meer teruggevoerd op wiskundige concepten, maar worden – net als de Venn-diagrammen in de jaren 70 – leerdoelen op zich. Waarom, vraagt de recensent zich af, wijken deze verdienstelijke auteurs zo sterk af van de standpunten van Hans Freudenthal naar wie hun instituut is genoemd? In zijn artikel 'What is algebra and what has it been in history', zie [3, pp. 189–200], dat trouwens nergens in het boek wordt geciteerd, behandelt Freudenthal dezelfde problematiek – maar juist zonder de algebra op school van de rest van de wiskundige cultuur te isoleren: 'What is algebra? There is no Supreme Court to decide such questions. Nevertheless, "algebra" has a meaning in everyday language just as "chair" and "table" have. For instance, at school algebra is solving linear and quadratic equations. It is the kind of algebra the Babylonians started with. Was their algebra not algebra, because their symbolism was not smooth enough? Are "length" and "width" much worse than "x" and "y" if you can give clear recipes for solving quadratic equations in such terms? Is it not algebra if the sum of the first 10 squares is laid down in a numerical formula that allows one to extend the result to any *n*? This ability to describe relations and solving procedures, and the techniques involved in a general way, is in my view of algebra such an important feature

Gegeven de functies A en B met $A(x) = x - 1$ en $B(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

a Bereken de afgeleide van de productfunctie $A \cdot B$ met behulp van de productregel.
b Je kunt de afgeleide van $A \cdot B$ ook op een handiger manier berekenen. Hoe?
c Ga na of de antwoorden bij de onderdelen a en b op hetzelfde neerkomen.

figuur 2 Twee manieren van differentiëren (blz. 73, figuur 4)

a. ***Controleer onderstaande ketting:***

$$\boxed{x+6} \xrightarrow{\textit{kwadraat}} \boxed{x^2+12x+36} \xrightarrow{\textit{min 1}} \boxed{x^2+12x+35} \xrightarrow{\textit{ontbind}} \boxed{(x+5)(x+7)}$$

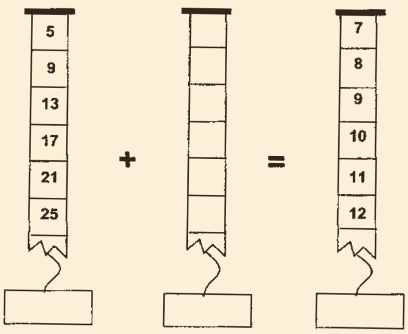
b. ***Voer net zo'n berekening uit met achtereenvolgens: $x+4$, $y+10$, $z+11$, $p+1$***
c. ***Bedenk zelf nog een paar andere voorbeelden.***
d. ***Kun je een algemene regel geven?***

figuur 4 Pijlenkettingen (blz. 131)

of algebraic thinking that I am willing to extend the name "algebra" to it, as long as no other name is proposed, and as far as I know no other name has been put forward. But what is in a name?'

Algebra op basisschool en vmbo

En toch is het na deze inleiding nog de moeite om verder te lezen. Het volgende hoofdstuk, van Truus Dekker en Maarten Dolk, schetst bijvoorbeeld op een bescheiden en heldere manier hoe leerlingen op de basisschool wel degelijk met algebraïsch denken en handelen in contact kunnen worden gebracht. Vele van de FI-klassiekers als V-patronen (zie ***figuur 6***), rekenen met stroken (ook in hoofdstukken 4 en 7) passeren hier de revue.



figuur 5 Rekenen met stroken (blz. 33)

Vervolgens worden in hoofdstuk 3 door Drijvers, Dekker en Wijers de mogelijkheden besproken om algebra in het vmbo te onderwijzen, waarbij een leerling constateert: 'Wat *a* is, dat kun je niet weten.' Er zijn aardige en leerzame situaties beschreven waarin leerlingen contact met algebra maken. Helaas wordt er weinig vanuit een theoretisch perspectief naar gekeken. Hier zou men kunnen denken aan de door Freudenthal al beschreven aspecten wiskundige taalniveaus, perspectiefwisseling of het verschil tussen comprehensie (samenvoegen) en apprehensie (oppakken) dat juist bij het begrijpen van 'wat *a* is' een grote rol kan spelen: 'I used the words *comprehension* and *apprehension* to distinguish two ways of acquiring generalities. I took the liberty of moulding these terms comprehension and apprehension more sharply than I found them, and I did so not without a bit of etymology in the background. *Com*prehension, the "taking together", *ap*prehension, "the taking on". Generalities by *gathering* many details, versus *seizing* a structure, albeit by an example, by one example.'; (zie [5, p. 197]). En dit is juist voor het leren van algebra van cruciaal (zie [5, p. 221]): 'The usual method of traditional arithmetic and algebra instruction is to introduce the operations and corroborate the laws governing them by examples; as opposed to this the geometric and the algebraic method, if truly understood, aim straightforwardly at generality. As I have stressed, examples are not a bad thing, if only they are really exemplary, that is paradigmatic.' In plaats van te laten zien hoe een vmbo-leerling wellicht toch een algemenere notie kan krijgen van 'wat *a* is' of hoe tot een ander wiskundig inzicht te komen, geven de auteurs de voorkeur aan 'wiskundige geletterdheid' of 'mathematical literacy', een naar aanleiding van de PISA-toets door de OECD opgeklopt begrip (niet zonder invloed van het FI) dat een beetje alles en niets betekent: '…het vermogen om wiskunde te herkennen, te begrijpen en te gebruiken.' Het komt er zowel voor de basis- en kaderberoepsgerichte leerweg, vmbo-bb en -kb, als ook voor de gemengde en theoretische leerweg, vmbo-gl en vmbo-tl, op neer dat het wiskundeonderwijs zich op drie doelen richt: het leven van alledag, ondersteuning van praktijkvakken en voorbereiding op vervolgopleiding. Wiskunde als zelfstandig vak en zijn cultuurhistorische rol in dienst van het in de verlichting gegroeide ideaal om alle jonge mensen een mondige kijk op onze cultuur te geven, worden hier niet meer mee bedoeld.

Algebra voor bèta's

Het hoofdstuk over algebra in natuur en techniek van Henk van der Kooij en Aad Goddijn schetst problemen en oplossingen bij het gebruik van wiskunde in andere exacte vakken. Vooral de suggestie om de relatie tussen getallen en meetgegevens te verhelderen en door een foutenanalyse productief te maken geeft een vruchtbaar aanknopingspunt tussen deze vakken dat in het huidige onderwijs ontbreekt.

Terug naar het oefenen

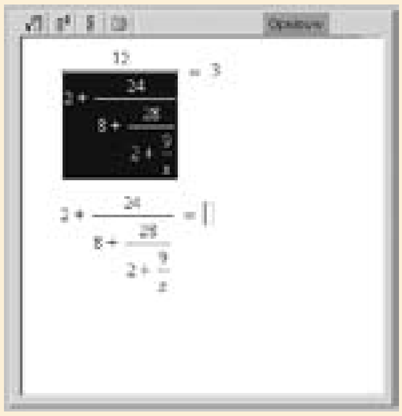
In een tijd waar menigeen terugverlangt naar 'reproductief oefenen' nemen Paul Drijvers en Martin Kindt in de hoofdstukken 4, 5 en 7 het nadrukkelijk op voor het 'productief oefenen' van algebraïsche vaardigheden waar betekenis, perspectiefwisseling, variatie, zinvolheid en eigen productie een centrale plaats innemen en waar de kansen worden benut die zich in het gewone programma voordoen (zie ***figuur 7***). Kindt geeft in hoofdstuk 7 blijk van zijn rijkdom aan intelligente en aansprekende (maar ook veelal bekende) voorbeelden en hij pleit voor de herbezinning op inzichtelijke technieken zoals kwadraatafsplitsen. Helaas wordt er bij beiden te weinig toegewerkt naar meer abstracte wiskundige inzichten, methodes en technieken zoals volledige inductie bij stippenpatronen of een abstract functiebegrip dat pijlenkettingen, substituties c.q. de bordjesmethode wezenlijk overstijgt. Evenzo wordt er uiterst spaarzaam omgegaan met de hedendaagse wiskundige taal en logica zoals eenvoudige verzamelingen- en functienotatie of elementaire propositielogica zoals die bij het doordachte gebruik van tekens als $\Leftrightarrow$, $\Leftarrow$, $\Rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ tot uiting zou komen.

Algebra en ICT

In hoofdstuk 8 over algebra en ICT wordt er door de auteurs Drijvers en Van Reeuwijk een overzicht gegeven van de verschillende rollen die ICT bij het wiskundeonderwijs kan spelen. Zij maken hier verschil tussen 'algebraïsche vaardigheden met ICT-gebruik' en 'algebraïsche vaardigheden met pen en papier'. Dit onderscheid heeft geen wiskundige betekenis. ICT-algebra bestaat net zo min als schoolalgebra. Door zich te concentreren op deze uiterlijke gezichtspunten missen de auteurs de kans om uit te gaan van wiskundige begrippen, inzichten en technieken die begrepen en geleerd moeten worden en die vooral los staan van hun weergave door ICT of pen en papier. Beide benaderingen kunnen op hun manier bijdragen aan het begrijpen van wiskunde, maar brengen ieder een eigen vorm van *wiskundig besef* van deze wiskundige inhouden voort. De opgave uit 'Moderne wiskunde' (zie ***figuur 8***) maakt dit duidelijk, waarin de leerlingen bij 'een grafiek van het type $y = \sin(x - c)$' moeten onderzoeken 'welke invloed de parameter c heeft op een sinusoïde'. Afgezien van het slordige wiskundig taalgebruik in de opgave zullen de leerlingen opmerken dat bij positieve c de grafiek op hun rekenmachine naar rechts gaat en bij negatieve naar links. Voor bepaalde waardes van c zien zij op het scherm geen verschil meer met de grafieken van $y = \cos(x)$ en $y = -\sin(x)$ van waaruit zij gevraagd worden het samenvallen van de betreffende grafieken te constateren. De ICT-omgeving, of 'handheld' of op PC, levert hier geen enkele bijdrage om te begrijpen *waarom* dat zo is. Trouwens, pen en papier doen dat evenmin. Om het te begrijpen zit er niets anders op dan erover na te denken. Helaas wordt een dergelijke voorbeeldopgave onkritisch geciteerd.
In dezelfde valkuilen trappen de auteurs ook bij het 'vermenigvuldigen van lijnen' en de schuifbalk-applets. Andere voorbeelden in dit hoofdstuk van didactische hulpmiddelen, zoals de 'algebrapijlen', 'stroken met etiketten' of de 'verwarrende grafieken' op het scherm van de GR, roepen echter veel interessanter vragen op die tot meer inzicht leidende denkprocessen kunnen stimuleren.

Geschiedenis

Aan de hand van een aantal bekende voorbeelden uit het papyrus Rhind, de Babylonische kleitabletten, de teksten van Diophantus via bijvoorbeeld beschouwingen over Newtons Euclidisch meetkundig bewijs dat de ellipsbaan van planeten een gevolg is van de universele zwaartekrachtswet en andere bronnen, laat Goddijn in zijn historische kijk op algebra zien, dat algebra al vanaf zijn ontstaan tot in de moderne tijd iets anders is dan letterrekenen. Hier blijkt hoe de algebraïsche taal beetje bij beetje op een genetische manier is geëvolueerd. En het blijkt eveneens (net als in [3]) dat deze historische kijk het wezen van de algebra veel bescheidener en



figuur 7 Het applet 'Vergelijkingen oplossen met bordjes' (blz. 61)

figuur 6 Stippen in een V-patroon (blz. 35)

a. Je ziet een grafiek van het type $y = \sin(x - c)$.
Onderzoek welke invloed de parameter c heeft op een sinusoïde.
b. Plot voor verschillende waarden van c de grafiek van $y = \sin(x - c)$.
Welk verschil zie je als $c < 0$ of als $c > 0$?
c. In welk punt zit het beginpunt van een golf?
d. Voor welke waarden van c vallen de grafieken van $y = \sin(x - c)$ en $y = \cos x$ samen?
Geef zo mogelijk een exact antwoord.
e. Voor welke waarden van c vallen de grafieken van $y = \sin(x - c)$ en $y = -\sin x$ samen?

figuur 8 Deel van een pagina uit 'Moderne wiskunde' A1(B1) deel 1 (blz. 140)

eerlijker afbeeldt dan bijvoorbeeld de 'tien geboden' in het begin. In de geest van Freudenthals geleide heruitvinding probeert hij conclusies voor de schoolalgebra te trekken. Helaas wordt hierbij (in paragraaf 9.8) een oppervlakkige GR-berekening van de oplossingen 11 en -7 van een bepaalde kwadratische vergelijking als serieus alternatief voor een wiskundige berekening gepresenteerd, terwijl zij alleen een niet-vergelijkbare kwaliteit van wiskundig besef bij de leerling teweeg kan brengen. Dit wordt gerechtvaardigd via een algemene beschouwing over grafieken die wel of niet op grafische rekenmachines kunnen worden afgebeeld.

Algebra als folklore

In het nawoord ten slotte voorspelt Drijvers dat de algebra in de toekomst zal zijn 'ingeblikt' in apparaten, machines en software. 'Betekenisvolle algebra' op school acht hij dan nog wel nodig vanwege haar cultuurhistorische en vormende waarde, vanwege haar bijdrage aan 'mathematical literacy' en om de algebra achter de schermen te begrijpen. De nadruk moet volgens hem bij deze vaardigheden niet zozeer op het procedurele liggen; eerder zijn ze als een elementaire vorm van symbol sense te beschouwen. Hierbij probeert hij nogmaals de mythe in stand te houden dat het mogelijk zou zijn over een serieuze vorm van symbol sense te beschikken zonder elementaire algebraïsche vaardigheden te beheersen (zoals het oplossen van kwadratische vergelijkingen).
Het geschetste toekomstbeeld laat weinig ruimte voor de wiskunde. Na bijvoorbeeld een aansprekende meetkundige constructie van het *folium van Descartes* geschetst te hebben, die ook nog mooi met Cabri kan worden gevisualiseerd, constateert Drijvers: 'Op een geschikte website (zoals *http://mathworld.wolfram.com/*) is wel een parametervoorstelling van de kromme te vinden, die de leerling in een computerpakket in de door Cabri gevonden vergelijking kan substitueren. Het pakket antwoordt met *true*.' Dat de leerling hierbij ook zo goed als geen wiskunde leert, had er volgens de recensent wel nadrukkelijker bij gezegd kunnen worden.
Drijvers heeft het over 'vitale variabelen' en vervolgt: 'Misschien werkt de interface anno 2020 met plaatjes en een uitrolbaar touchscreen veel makkelijker dan de huidige generaties van mobiele telefoon, digitale camera, gameboy, tv en PC. Je kunt allerlei vragen inspreken over je figuur, je model, zonder dat jij zelf de "ouderwetse" algebra hoeft te kennen.' In de aanbevelingen volgen dan weer beschouwingen over 'vaardigheden met pen en papier' en 'handmatige vaardigheden' in plaats van op een wiskundige manier te beschrijven welk conceptueel begrip een leerling van een stuk wiskunde zal en kan verwerven.

Voor ieder wat

Het door acht auteurs geschreven boek is een mengelmoes van verschillende insteken en praktijken. Hierdoor is niet altijd duidelijk voor wie dit boek geschreven is. De titel is meer voor leerlingen, de toelichting over wat algebra is heeft als doelgroep mensen die er blijkbaar geen eigen beeld van hebben en de beschouwingen over de leerprocessen bij het leren van algebra zijn voor docenten en didactici van de wiskunde.
Samenvattend luidt de aanbeveling voor een mogelijke lezer om de inleiding over te slaan, en bij de andere artikelen in het bijzonder te letten op de rijke schat aan aansprekende voorbeelden waardoor wiskunde met inzicht en begrip geleerd kan worden.

Verwijzingen

[1] L.V. Ahlfors et al.: *On the mathematics curriculum of the high school.* In: The American Mathematical Monthly, Volume 69 (1962).
[2] H. Freudenthal: *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers (1983).
[3] H. Freudenthal: *What is algebra and what has it been in history?* In: Archive for History of Exact Sciences, Volume 16, Number 3. Berlin/Heidelberg: Springer (1977).
[4] H. Freudenthal: *Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 1, 2.* Stuttgart: Klett (1973).
[5] H. Freudenthal: *Weeding and sowing / Preface to a Science of Mathematical Education.* Dordrecht: Reidel (1978).

Over de recensent

Rainer Kaenders is vakdidacticus wiskunde en hoofd onderwijs op het Instituut voor Leraar en School aan de Radboud Universiteit Nijmegen. Na aanvankelijk als onderzoeker in de singulariteitentheorie in Bonn, Nijmegen, Utrecht en Düsseldorf te hebben gewerkt was hij gedurende vijf jaar leraar wiskunde aan een middelbare school in Nijmegen en één jaar lang vakdidacticus aan de TU Delft. E-mailadres: *r.kaenders@ils.ru.nl*