BEGEISTERUNG FÜR MATHEMATIK

RAINER KAENDERS

Öffentliche Antrittsvorlesung

24. Oktober 2008

Universität zu Köln

Seminar für Mathematik und ihre Didaktik
Gronewaldstraße 2
50931 Köln
www.kaenders.uni-koeln.de

Impressum

Titel: Begeisterung für Mathematik
Untertitel: Antrittsvorlesung Prof. Dr. R.H. Kaenders
Autor: Rainer Kaenders
Herausgeber: Universität zu Köln

Adresse:
Seminar für Mathematik und ihre Didaktik
Gronewaldstraße 2
D-50931 Köln
url: www.kaenders.uni-köln.de
Telefon: +49 221 470-4751
Auflage: 350 Exemplare
Druck: Zentrale Hausdruckerei der Universität zu Köln

Jahr: 2008

Der Buchstabe tötet, aber der Geist machet lebendig.

(2 Kor. III. 6, aus [10])

1. Einleitung

Eine von Wissen und Können getragene Auffassung von Mathematik zu vermitteln, die ein Leben lang trägt, das individuelle Leben bereichert und Menschen in ihrer Lebenstüchtigkeit und ihrer Mündigkeit unterstützt, ist eines der höchsten Ziele des schulischen Mathematikunterrichts. Hiermit ist ein Anspruch verbunden, den im alltäglichen Mathematikunterricht wahr zu machen, kaum eingefordert, aber angestrebt werden kann. Seine Erfüllung ist nicht nur mit schwer messbaren, sondern auch an schwer planbare Bedingungen geknüpft. Lernen – und insbesondere das Lernen von Mathematik – ist ein Prozess zwischen LehrerIn und SchülerIn, der immer in soziale, kulturelle, organisatorische, politische und historische Kontexte eingebettet ist.

Begeisterung oder Inspiration für Mathematik zu erwecken, den Funken überspringen zu lassen, sich von der Mathematik geradezu *küssen* zu lassen, ist noch weitaus schwieriger zu erreichen. Was zu begeistern vermag, hängt zwangsläufig von den Vorlieben, den Erfahrungen und den Persönlichkeiten der Schüler und Lehrer ab. Für die Begeisterung ist es notwendig, dass Schüler

[0]Diese Antrittsvorlesung gibt mir die Gelegenheit, mich bei meinen verehrten Lehrern zu bedanken. Zunächst gilt mein Dank meinen Eltern und besonders meinem für Mathematik aufgeschlossenen Vater, den ich auch heute sehr vermisse. Meinem Mathematiklehrer, Carl-Peter Fitting, verdanke ich den Zugang zur Kultur der Mathematik. Während meines Studiums in Bonn, habe ich von verschiedenen Mathematikern lernen dürfen. Insbesondere der Betreuer meiner Diplomarbeit, Prof. Dr. Egbert Brieskorn, und seine Sicht auf Mathematik übten große Anziehungskraft auf mich aus. Mein Doktorvater, Prof. Dr. Jozef Steenbrink von der Universität Nimwegen, hat mich weiter tief in die Welt der Forschungsmathematik zwischen Singularitätentheorie und algebraischer Geometrie eingeführt. Als mich der Mathematikunterricht wieder zurück auf die Erde holte, habe ich von meinem Lehrerausbilder und späteren Kollegen Dr. Lodewijk van Schalkwijk Wesentliches über Mathematikunterricht in Theorie und Praxis erfahren dürfen. Und schießlich lerne ich jeden Tag von meiner Frau Claudia Weber und unseren Kindern Josef, Barend und Jeanne – viel mehr als Mathematik.

frei von Angst und Zwang ihre eigenen Fragen, ihren Geschmack, Vorlieben und Interessen durch Mathematikunterricht ausbilden lernen. Gleichzeitig müssen sie die nötige Disziplin entwickeln, die sie auf ihr eigenes Denken und ihre Fertigkeiten vertrauen lässt – und zwar eine Disziplin, die sie auf Dauer selbst in Freiheit aufzubringen im Stande sind. Es gibt keine Begeisterung ohne Freiheit, Kreativität, Autonomie des Denken und Disziplin.

Sicherlich ist Begeisterung – anders als die kurzfristige Erfüllung von Lernvorgaben und nützlicher Fertigkeiten – weder zu planen noch zu erzwingen. Schon Aristoteles scheint gewusst zu haben, dass ein Kuss kein Gewicht hat. Es handelt sich um etwas Transzendentes – um Spriritualität. Begeistert zu sein oder zu werden und zu begeistern, ist eine Gnade. Es wird nicht nur nach gerechten Maßstäben bestimmt, wem diese Gnade zuteil werden darf. So wenig wie man Elternhaus, Schule, kulturelle Hintergründe, Gesundheit, Talente, Wohlstand oder Glück selber machen kann, gelingt dies mit Begeisterung. Und trotzdem, spielt Gerechtigkeit eine Rolle, in der Frage, ob jedem Kind Zugänge zur Entwicklung des Denkens, des Geschmacks und der Kreativität und damit Gelegenheiten zur Begeisterung eröffnet werden.

Aber warum überhaupt sollte man versuchen, Begeisterung für Mathematik entstehen zu lassen? Zunächst lässt sich Nützliches mit Begeisterung spielerischer und effektiver lernen als ohne. Doch dazu genügt schon Motivation – Begeisterung ist mehr. Wenn das Nützliche dazu dient, Kinder lebenstüchtig (und nicht nützlich) zu machen, so dass Sie in der Lage sind, ihre eigene Wahrheit zu suchen und zu leben, dann kann man sie auch begeistern. Als Lehrer ist es schließlich unsere Aufgabe, ihnen das Wahre, das Gute und das Schöne (*Verum, Pulchrum, Bonum*) weiter zu geben und auch die Verantwortung dafür zu übernehmen. Wenn wir nicht wollen, dass Werbeindustrie, politische Parteien, Regierungen oder andere für die Schüler entscheiden, was wahr, gut und schön ist, dann müssen wir ihnen die Gelegenheit geben, in Kontakt mit den Quellen der Kultur zu kommen und sie mit dem begeistern, was uns begeistert.

Weil begeisternder Mathematikunterricht so schwer zu planen und letztlich nicht zu garantieren ist, müssen wir aushalten,

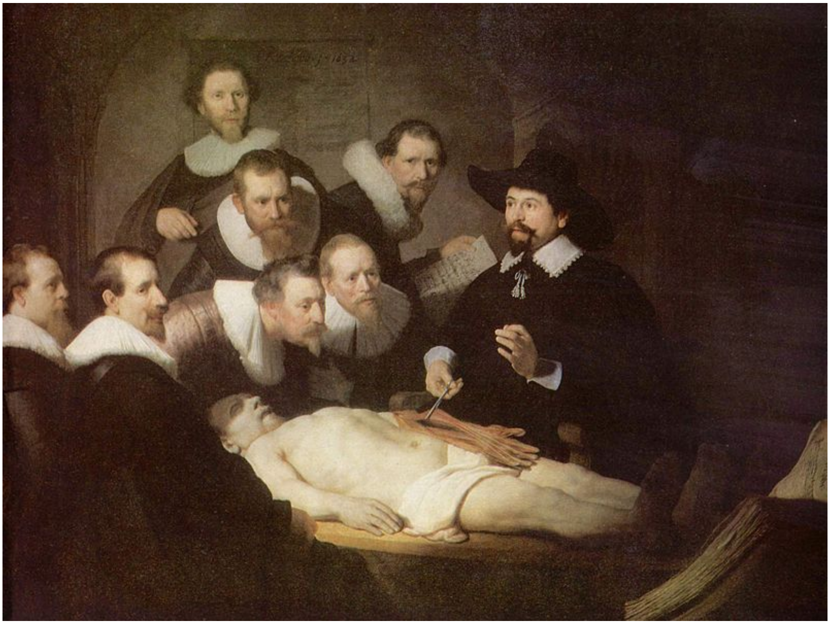

ABBILDUNG 1. Rembrandt van Rijn: De anatomische les van Dr. Nicolaes Tulp

dass wir seinen Erfolg kaum wirklich umfassend werden messen können. Auch wenn kurzfristige und überschaubar zu lernende Inhalte und Fertigkeiten noch durch Tests überprüfbar sind, so ist schon nicht mehr klar, ob und wie sich dieses Wissen und diese Fertigkeiten nachhaltig entwickeln. Wenn man sich etwa anschaut, wie Politiker unentwegt „*größte gemeinsame Nenner*“ suchen, erfährt man eindrucksvoll, wie bescheiden die nachhaltigen Effekte von Mathematikunterricht einzuschätzen sind – auch, wenn heutzutage die allermeisten Menschen mindestens zehn Jahre Mathematikunterricht genossen haben. Selbst durch die großspurig formulierten Ziele der *mathematical literacy*[1], die im nicht-

[1]“Mathematical literacy is an individual’s capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded judgements and to use and engage with mathematics in ways that meet the needs of that individual’s life as a constructive, concerned and reflexive citizen.“ und

öffentlichen (unwissenschaftlichen und von anderen Zielen geleiteten) PISA Unternehmen mit intellektuell unehrlichen und zum Teil kleingeistigen Aufgaben kombiniert wurden (vgl. [19], [34] oder [14]), wird dies nicht gelingen. Im Gegenteil, diese Tests führen immer mehr zu einer nachweisbaren Standardisierung von Mathematikunterricht, der entsprechend standardisierte kurzfristige Lernziele planbar für den Test erzeugen soll. Auch, wenn die Unzulänglichkeit des damit verbundenen Bildungskonzepts an vielen Stellen ersichtlich geworden ist, fährt die Politik unermüdlich fort, dem zweifelhaften Versprechen eines leichteren und von außen managebaren Mathematikunterrichts hinterherzujagen. Unter dem Vorwand, das Lernen von Mathematik leichter zu gestalten, fördert man *antididaktische Omission*, d.h. das Weglassen von Begriffen und Techniken, die für das Erlernen eines tragfähigen Mathematikverständnisses unverzichtbar sind.

Die Suche nach *mathematical literacy* durch einfältige Tests erinnert an Generationen kleingläubiger Anatomen, die Leichen sezierten, um die menschliche Seele in Zwerchfell, Herz, Rippenbogen, Ventrikel oder Hirnhöhlen zu suchen. Stofflich unterscheidet sich der soeben verstorbene Mensch nur geringfügig vom beseelten: Eine Gewebeprobe wird den wesentlichen Unterschied nicht zutage fördern. Und natürlich liefern beide, die Obduktion sowie der PISA-Test, auch Informationen, die nicht von der Hand zu weisen sind. Nur zur *inhaltlichen Verbesserung* von Mathematikunterricht tragen diese Informationen kaum bei. Mit Auffassungen mathematischer Bildung wie *mathematical literacy* ließe sich daher noch leben, wenn sie nicht die Gelegenheiten zur Begeisterung mit Mathematik bedrohten und die dazu fähigen Lehrerpersönlichkeiten frustrierten.

das wird im Detail ausgeführt: "... Citizens are bombarded with informations such as "global warming and the greenhouse effect", "population growth", "oil slicks and the seas", "the disappearing countryside". Last but not least, citizens are confronted with the need to read forms, to interpret bus and timetables, to succesfully carry out transactions involving money, to determine the best buy at the market, etc. ..." (The PISA 2003 Assessment Framework, Reading Science and Problem Solving Knowledge and Skills ©OECD 2003) Zentrale Inhalte der Mathematik wie Teilbarkeit oder Primzahlen kommen in diesem Verständnis mathematischer Bildung nicht vor.

Auch heute sollten wir statt dessen unermüdlich versuchen, Schüler zu begeistern. Dazu gehört, dass wir ihnen vorleben, wie man sich angesichts eines schweren, intellektuell konfrontierenden und herausfordernden Faches verhalten und daran lernen kann, was die eigenen Möglichkeiten hergeben. Wenn man mathematischer Begeisterung den Weg bahnen will, kann man dafür etwas tun. In meiner Antrittsvorlesung will ich über Versuche reden, mit Hilfe mathematikdidaktischer Forschung Gelegenheiten zur Begeisterung zu schaffen und dadurch Mathematiklehrer in ihrer Arbeit zu unterstützen. Auf die Begeisterung selbst – können wir dann nur hoffen.

2. Mathematik ist mehr

Wenn wir über Mathematikunterricht reden, dann kommen wir nicht umhin, darüber zu reden, was das ist oder sein soll: das Fach Mathematik. Hierzu gibt es historisch sehr unterschiedliche Auffassungen: das Studium der *Elemente* von Euklid, die didaktische Bewegung des *New Math*, die *Mathematical Literacy* unserer Tage oder Formen von Mathematikunterricht in totalitären Systemen. Diese Auffassungen sind immer an gesellschaftliche Bedingungen geknüpft.

Paul Ernest [8] hat für die britische Gesellschaft fünf grundverschiedene Auffassungen zum Mathematikunterricht aus der Perspektive von Interessengruppen und ihrer politischen Ideologien, Wertesysteme, gesellschaftlichen und entwicklungspsychologischen Ausgangspunkten und ihren Vorstellungen von Mathematik beschrieben. Die Beschreibung reicht von den *Industrial trainers*, die vor allem Wert darauf legen, dass zukünftige Arbeitnehmer, die Standard(rechen)verfahren beherrschen bis hin zu den Auffassungen der sozialdemokratisch orientierten *Public Educators*, bei denen der Mathematikunterricht zu einem kritischen Bewusstsein führen soll.

Die Sicht vieler universitärer Mathematiker fällt bei Ernest weitestgehend in die Kategorie der *Old Humanists*: Die Entwicklung der Mathematik wird dort auf das Wissenschaftsgebäude beschränkt. Sie ist gekennzeichnet durch das sukzessive Auftreten außergewöhnlicher mathematischer Persönlichkeiten, die die

Kultur der Mathematik hervorgebracht und vorangetrieben haben. Diese Kultur existiert unabhängig von der Wirklichkeit der allermeisten Lernenden – soll diesen aber beigebracht werden. In dieser Auffassung von Mathematik kommen viele andere – etwa gesellschaftliche, berufsvorbereitende, persönlichkeitsbildende oder alltagstaugliche – Aspekte nicht vor. Zur Entwicklung der eigenen mündigen Persönlichkeit und zur Bewältigung von Beruf und Alltag trägt diese Auffassung nur bei wenigen Schülern bei. Daher gibt es in der Mathematikdidaktik den Vorschlag, das Fach Mathematik als Lerngebiet im weitesten Sinne als *MATHEMATIK* in Großbuchstaben [43] zu bezeichnen, um es vom reinen Wissenschaftsgebäude der *Mathematik* zu unterscheiden. Zur MATHEMATIK gehören also auch viele nützliche Dinge, deren Sinn sich nicht innerhalb des Wissenschaftsgebäudes der Mathematik erschließt. Dörfler [6] nennt das Studium dieses Gebietes *Mathematicology*. Wenn es recht verstanden wird, kann auch hier „vom Fach aus" ([45]) gedacht werden.

2.1. **Gänseblümchenmathematik.** Die für mich schönste und ansprechendste Beschreibung der MATHEMATIK als Quell geistiger Erquickung, hat Hans de Rijk gegeben, der Erfinder der wunderbaren mathematischen Schülerzeitschrift *Pythagoras*, der auch durch Publikationen über M.C. Escher unter dem Pseudonym Bruno Ernst bekannt ist ([39]). Die Mathematik, für die er sich und andere begeistern kann, nennt er *Gänseblümchenmathematik (madeliefjes wiskunde)*:

> „Sieh die Mathematik als einen wunderschönen Garten. Mitten in dem Garten steht ein gewaltiger Baum mit Ästen, die in den Himmel reichen. Mit dem Stamm des Baumes sind die Namen großer Mathematiker aus der fernen Vergangenheit verbunden: Pythagoras, Archimedes, Euklid. Höher im Baum finden sich die Namen kluger Köpfe wie Euler, Gauß und Hilbert. Will man die Mathematik ganz oben im Baum bewundern, dann muss man ganz schön klettern.

> Aber der Garten besteht nicht nur aus Bäumen alleine; es gibt auch Blumenbeete und Sträucher. An denen kann man sich auch ohne Klettern mindestens so erfreuen. Und ganz einfach auf dem Boden, zwischen dem Gras, steht manchmal ganz unerwartet ein wunderschönes Gänseblümchen. Das ist Mathematik, die Hans de Rijk am liebsten mag: madeliefjeswiskunde – Gänseblümchenmathematik.“

Mathematische Begeisterung ist üblicherweise reserviert für Schüler, die Einlass in den Tempel der Mathematik begehren. Dass auch Schüler in Haupt- und Realschule oder im Grundkurs an Gesamtschulen und Gymnasien für die Mathematik als solche *begeistert* sind, bleibt oft die Ausnahme. Das jedoch muss nicht zwangsläufig so sein. Zum Beispiel hat der europäische Känguru Wettbewerb es verstanden, Begeisterung für Mathematik entstehen zu lassen, von der sich sogar oft die Eltern anstecken lassen. Auch die so genannte *A-lympiade* des Freudenthal Instituts in Utrecht, an dessen Entwicklung wir uns in Köln aktiv beteiligen und die wir zusammen mit dem Schulministerium im Land NRW ausrichten, zeigt, dass es sehr wohl möglich ist, mathematische Begeisterung bei Schülern zu wecken, bei denen das System das gar nicht unbedingt vorgesehen hatte.

In der niederländischen ministeriellen Lehrplankommission cT-WO (commissie toekomst wiskundeonderwijs, www.ctwo.nl), deren Mitglied ich bis zu meinem Dienstantritt in Köln war, ist uns das Streben nach Begeisterung bei der Entwicklung der Fächer *Wiskunde A* und *Wiskunde C* ein wichtiges Anliegen gewesen.[2] Dies verlief nicht ganz reibungslos und sorgte für Differenzen mit den weiterführenden Ausbildungen (vertreten durch die so genannte *Resonanscommissie*), die – soweit ich weiß – schon überwunden sind oder bald sein werden.

Auch in Deutschland ist eine Reform etwa der Grundkurse in Mathematik an Gymnasien und Gesamtschulen denkbar: Dort

[2]Dies sind Mathematikfächer, die sich vor allem an mathematisch schwächere Schüler richten, die Mathematik später voraussichtlich anwenden werden oder kulturelle Aspekte der Mathematik kennenlernen möchten.

wird oft die *Light*-Version des entsprechenden Leistungskursstoffes angeboten, mit der Folge, dass viele Schüler, die Mathematik als eine sinnentleerte und manchmal absurde Beschäftigung erfahren. Es bedarf meiner Meinung nach einer aufrichtigeren Reform dieser Inhalte vom Fach aus.

3. Didaktische Phänomenologie mathematischer Strukturen

Als Pionier der Mathematikdidaktik hat Hans Freudenthal [13] – ausgehend von der grundlegenden Kritik, die er bezüglich der New Math Bewegung formuliert hatte – den Begriff der didaktischen Phänomenologie mathematischer Strukturen geprägt. Anhand verschiedener mathematischer Konzepte verdeutlichte er, dass hier der Schlüssel zum didaktischen Zugang zur Mathematik gesucht werden kann: „Unsere mathematischen Konzepte, Strukturen, Ideen sind als Werkzeuge erfunden worden, die Phänomene der physikalischen, sozialen und mentalen Welt zu organisieren. Phänomenologie eines mathematischen Konzeptes, einer Struktur oder einer Idee bedeutet sie in Beziehung zu den Phänomenen zu beschreiben, für die sie erfunden wurde oder zu denen sie im Lernprozess der Menschheit in Beziehung gesetzt wurde; und, soweit diese Beschreibung mit dem Lernprozess der jungen Generation zu tun hat, ist dies didaktische Phänomenologie, ein Weg dem Lehrer die Stellen zu zeigen, an denen der Lernende in den Lernprozess der Menschheit einsteigen kann. Nicht in ihrer Geschichte sondern in ihrem Lernprozess, der immer noch anhält, was bedeutet, dass tote Äste abgeschnitten und lebendige Zweige geschont und unterstützt werden müssen.“ (Übers. d. Verf. aus [13])[3]. Freudenthal ([12], S. 18) unterscheidet hierzu *mentale Objekte* von *mathematischen Konzepten*. Der Übergang von mentalen Objekten zu mathematischen Konzepten ist Gegenstand der Phänomenologie mathematischer Strukturen.

Phänomene können unsere Aufmerksamkeit fesseln und rufen bei uns Fragen hervor, wenn sie *beziehungshaltig* (Freudenthal)

[3]Freudenthal distanziert sich von der Husserlschen Phänomenologie [18].

sind, d.h. in Verbindung mit eigenen – auch möglicherweise mathematischen – Erfahrungen stehen. Dann erst erhalten mathematische Begriffe eine Bedeutung. Eine notwendige Voraussetzung für mathematische Begeisterung besteht meiner Einschätzung nach darin, Phänomene so zu betrachten, dass sie eigene wirkliche Fragen beim der/dem Lernenden hervorrufen. Im klassischen Unterricht sind die allermeisten Fragen eher didaktisch oder rhetorisch, und Lehrer sind, wie wir alle wissen, Menschen, die Dinge fragen, die sie selbst schon wissen. Erst, wenn eigene Fragen anhand von Phänomenen eventuell auch in der Gemeinschaft der Lernenden und des Lehrers etabliert wurden, können mathematische Konzepte sinnvoll zur Beantwortung dieser Fragen eingesetzt werden. Zum Beispiel hat Lodewijk van Schalkwijk [40] anhand eines Kurses über *fraktale Strukturen* und *dynamische Prozesse* gezeigt, dass erst nach einer sorgfältigen Vorbereitung und Etablierung mathematischer Fragen, deduktives Denken und Beweise auf wirkliches Interesse bei den Schülern stoßen, da sie den Schülern helfen, einander von der Richtigkeit der eigenen Antworten zu überzeugen. In der Mathematik ist die aktive und selbstständige Gestaltung des eigenen Lernprozesses anhand von Fragen motivierend, wie jeder weiß, der aktiv Mathematik betrieben hat.

Gefährlich ist hierbei die mögliche Palette der intellektuell unehrlichen Antworten auf ehrliche Fragen. Manchmal geht es ja eigentlich darum, einen bestimmten mathematischen Stoff durch zu nehmen. Begeisterung entsteht erst, wenn die mathematischen Konzepte dazu beitragen, Phänomene *innerhalb* ihres Kontexts zu begreifen. Ansonsten ist es ehrlicher zuzugeben, dass es um das Lernen des vorgegebenen mathematischen Stoffes oder um das Üben mathematischer Fertigkeiten geht [44].

Die Phänomenologie mathematischer Strukturen bietet trotz der großen Enttäuschungen der New Math Bewegung noch zahlreiche Möglichkeiten für den Unterricht zu Strukturen in der Mathematik. Entsprechende erfolgreiche Beispiele aus den 70er Jahren sind jene, in denen mathematische Strukturen als Phänomene (und nicht als Axiomatik) dargestellt werden, die dann *strukturiert* werden. Auch der *Wiskunde B-dag* des Freudenthal Instituts, an dessen Entwicklung wir jetzt in Köln ebenfalls aktiv beteiligt sind und den wir in NRW zusammen mit dem Land ausrichten, bietet hier eine Fülle inspirierender Beispiele.

Die mathematikdidaktische Frage, wie an didaktischer Phänomenologie orientierter Unterricht im Einzelfall gestaltet und organisiert werden kann, bleibt interessant. Dabei ist das Verhalten der Lehrer gegenüber den Phänomenen und den entstehenden Fragen der Schüler von entscheidendem Einfluss (siehe *models & modeling* in [32]). Daneben ist es auch in der Curriculumentwicklung unverzichtbar, die phänomenologische Perspektive einzunehmen, wenn man die bei den Lernenden anvisierte mathematische Wahrnehmung („wiskundig besef“ oder „mathematical awareness“ (Hewitt) beschreiben möchte.

Die Erforschung der didaktischen Phänomenologie mathematischer Strukturen und die Möglichkeiten der Etablierung eigener Fragen bei Schülern wird mich auch in Zukunft in meiner Forschung beschäftigen. Auch mein Doktorand, Herr Stephan Berendonk, will sich sich mit phänomenologischen Aspekten topologischer Strukturen beschäftigen.

4. Authentische Mathematik

Ein gutes Kriterium für die Entwicklung authentischer Fragen und Aufgaben und damit für mathematische Begeisterung sind die drei Fragen: Gab oder gibt es jemanden, der sich ernsthaft eine derartige Frage oder Aufgabe *gestellt* hat oder vielleicht gerade stellt – wenn es nicht sogar der Schüler selber ist? Wie wird in einer solchen Situation das Problem zufriedenstellend *gelöst*? Wie *lernt* man, derartige Probleme in solchen Situationen zu lösen? Es geht also um Authentizität bei der Wahl der Kontexte, der mathematischen Methoden und der Lernprozesse (vgl. *authentischer Mathematikunterricht* in [33]). Ohne Authentizität wird es nicht gelingen, jungen Menschen zu erklären, warum es sich lohnt, Mathematik zu lernen. Ein noch so ausgeklügeltes System mit (Kopf-)noten, zentralen Prüfungen und anderen sekundären Motivationen kann uns diese Aufgabe nicht abnehmen.

Auch, wenn dies jedem einleuchten wird, so ist man doch immer wieder verwundert, wie wenig sich die Macher von Mathematikunterricht sich daran halten. Etwa die in der Presse mit *Oktaeder des*

Grauens bezeichnete Abituraufgabe, die zu einer teilweisen Wiederholung des Mathematikabiturs geführt hat, fördert mein Grauen beim Gedanken an zentrale Abiturprüfungen weniger durch ihr Niveau als durch ihre Sinnlosigkeit. Natürlich kann man an einem Oktaeder spannende Mathematik betreiben, doch kein mathematische denkender Mensch würde ohne einen äußeren Anlass den Eckpunkten eines Oktaeders die Koordinaten $A(13|-5|3)$, $B(11|3|1)$, $C(5|3|7)$, $S(13|1|9)\dots$ geben, um es dann mit der Schar von Ebenen $E_\alpha: \;\; 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 9 \cdot (2a - 5) = 0$ mit $a \in \mathbb{R}$ zu schneiden. Wer ein Oktaeder ernsthaft betrachtet, wählt – falls keine äußeren Umstände etwas anderes erzwingen – den Ursprung des Koordinatensystems im Zentrum des Oktaeders, oder eventuell noch in einem seine Eckpunkte, und sorgt dafür, dass die Gleichung der Ebenenschar möglichst einfach wird – je nach dem *warum* sie oder er die Schnittflächen von Ebenen und Oktaeder bestimmen will. Genau in solchen Wahlen zeigt sich mathematische Kompetenz. Warum nun diese Aufgabe aber so gestellt ist, wird den Schülern nicht gesagt, wenn es denn überhaupt einen guten Grund gibt, abgesehen von der Notwendigkeit, eine komplizierte Abituraufgabe zu stellen.

In der Nachschreibeklausur lautet die entsprechende Aufgabe:

> „Der Dorfplatz eines italienischen Dorfes ist ein attraktives Ausflugsziel. Der Platz wird von drei quaderförmigen Gebäuden begrenzt, an denen sich die folgenden Gebäudeecken befinden:
> $P_1(-2|5|10)$, $P_2(-5|-5|10)$, $P_3(5|-5|10)$. In einem dieser Gebäude befindet sich ein Café. Der Dorfplatz wird durch die Straßenlampe L beleuchtet.
> ...
> a) Im Sommer scheint die Sonne auf den Platz. Zu einem bestimmten Zeitpunkt verlaufen die Sonnenstrahlen parallel zum Vektor $\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
> Dadurch wirft das Gebäude mit dem Café einen Schattenstreifen auf den Boden. *Bestimmen Sie die Breite dieses Schattenstreifens.*“

Jeder, der in einem italienischen Café sitzt und – warum auch immer – wissen will, wie breit der Schatten des Gebäudes, schreitet diesen ab. Sicherlich wird man nicht die Richtung der Sonnenstrahlen durch einen Vektor und die Eckpunkte des Gebäudes durch dreidimensionale Koordinaten festlegen, um dann mit linearer Algebra die Breite des Schattens zu bestimmen. Solche Aufgaben sind vielleicht zur Einübung allgemeiner Rechentechniken akzeptabel. Doch stehen diese Aufgaben für eine Aufgabenkultur, in denen sie als *Anwendungen* mit *Realitätsbezug* gelten. Man kann sich des Eindrucks kaum erwehren, dass schlicht weg vergessen wurde, wozu lineare Algebra gut ist. Auf diese Frage eine für Schüler ehrliche Antwort zu geben, ist nicht einfach. Dazu muss man über eine didaktische Phänomenologie der linearen Algebra bzw. der analytischen Geometrie verfügen.

So kann man noch viele Beispiele anführen, wie etwa die nie gestellten Beispielaufgaben, die das PISA-Unternehmen dem gemeinen Volk zugänglich macht, um die Empörung über die Verheimlichung der wirklichen Aufgaben zu verhindern. Als *gutes Beispiel* für die Anwendung von Mathematik wird dort etwa gefragt: „Der Stadtrat hat beschlossen, eine Straßenlaterne in einem kleinen dreieckigen Stadtpark zu errichten, so dass sie den ganzen Park beleuchtet. Wohin sollte sie gesetzt werden?“. Wie müssen dann erst die wirklichen Fragen aussehen? Diese Aufgabe erfüllt z.B. nicht das zuvor erwähnte Kriterium: Kein Stadtrat stellt sich solche Fragen.

Desweiteren finden sich in Schulbüchern (und auch beim PISA-Test) didaktische Mittel, die das Verständnis mathematischer Konzepte vorbereiten und unterstützen sollen, gleich selbst als mathematische Inhalte deklariert wieder. Bis zu den mathematischen Konzepten reicht es dann nicht mehr.[4] Hier ist der Kontakt

[4]Tony Gardiner [14]: “Mathematical literacy” and numeracy are often presented as though they were alternatives to traditional school mathematics, rather than by-products of effective instruction (like “literacy” or “maturity”). “Politicians and employers naturally seize upon this suggestion that there may be a pragmatic sounding alternative to “difficult” mathematics; bureaucrats then imagine that focusing on numeracy from the outset will deliver what they see as the required (utilitarian!) end-product more direct and more cheaply;. . . ”

zur akademischen Mathematik, aber auch zu den Natur- und Ingenieurwissenschaften, wie auch zu den vielen beruflichen Bereichen, wo Mathematik eine Rolle spielt, unverzichtbar. Auch dafür gibt es vielversprechende Beispiele wie die Modellierungswochen an der TU Kaiserslautern, die Mathematische Modelleer Competitie an der Universität Maastricht, das Projekt Diskrete Mathematik für die Schule an der TU Berlin oder die schon erwähnte internationale Wiskunde A-lympiade.

In der niederländischen Lehrplankommission cTWO haben wir uns entschieden, wieder mehr authentische Inhalte in den Mathematikunterricht zu bringen. Unter anderem wurde dafür ein neues Teilfach *Mathematik D (wiskunde D)* eingeführt, in dem spezielle Themengebiete in Zusammenarbeit mit Universitäten und Fachhochschulen erarbeitet werden. In Nimwegen haben wir hierzu ein Thema aus der Astronomie gewählt. Auch das Thema der Lastkräne ist durch Wunsch nach authentischerem Mathematikunterricht motiviert. Auf beides werde ich später noch zurückkommen.

5. Mathematik betreiben

Viele Menschen stellen sich naiverweise Lernen vor als metaphorische Übertragung von so genanntem Wissen von LehrerIn auf SchülerIn, wobei erstere dieses Wissen *besitzt* und letztere es *erwirbt*. Wie eine Flüssigkeit wird das Wissen durch *vormachen* oder *üben* in die Schüler gegossen, und mit Tests und Prüfungen versucht man herauszufinden, ob das Wissen dort auch *a*ngekommen ist. Dabei ist Mathematik, wie vielleicht jede Wissenschaft, keine Sammlung von Faktenwissen sondern eine aktive Beschäftigung, die geleitet ist von Fragen. Mathematiklernen ist Erwerb von Kenntnis, Sinngebung und Können in einem selbstgesteuerten, individuell unterschiedlichen Prozess, der auf ein Ziel ausgerichtetet und situationsabhängig verläuft.

Diesen Aktivität vollführen Menschen innerhalb der mathematischen Kultur – oder werden durch sie dort eingeführt. Dazu gehören neben allen Formen von Unterricht und Problemlösen auch allgemeine Unterstützung, Betreuung und Diskurs. Gerade der Diskurs unter Menschen, die nach Einsichten in dieselben mathematischen Fragestellungen suchen, war und ist eine wichtige

Triebfeder für die Entwicklung von Mathematik, die Gelegenheiten zur gegenseitigen Begeisterung schafft. Auch Schüler sollten in solche Formen des Diskurses eingeweiht werden. Unsere Untersuchung bei Schülern des 9. Schuljahres an drei niederländischen Schulen [27] hat gezeigt, dass die allermeisten Schüler das Betreiben von Mathematik verstehen als das Lösen vorgefertigter Aufgaben: in der Schule aus Schulbüchern und in der Universität aus entsprechend dickeren Büchern.

5.1. **Aktives und selbstständiges Mathematiklernen.** In Nimwegen und Umgebung haben sich zehn erfahrene Mathematiklehrer[5], die an fünf verschiedenen Schulen unterrichten, zusammengefunden, um in Zusammenarbeit mit einem Mathematikdidaktiker anhand von selbst entwickelten Materialien aktives und selbständiges Lernen bei ihren Schülern zu erforschen und zu fördern. Die gemeinsam durchgeführte *Aktionsforschung* geht aus von Bedürfnissen oder Fragen der teilnehmenden Lehrer und beinhaltet dann: Alle in der Gruppe erkunden - über die Entwicklung von Unterrichtsmaterialien hinaus - zunächst didaktische und mathematische Hintergründe, reflektieren die eigene Unterrichtspraxis und lernen mit Hilfe von systematischen Untersuchungen mehr über tatsächlich umsetzbare Möglichkeiten von aktivem und selbständigem Lernen. Die Resultate dieser Aktionsforschung sind relevant für die tägliche Arbeit der beteiligten Lehrer und bestehen überwiegend aus *lokalem Wissen*, dessen Gültigkeit sich zunächst auf den Kontext der beteiligten Lehrer und ihrer direkten Kollegen bezieht und für andere Mathematiklehrer als Anregung dienen kann. Durch die systematische Darstellung dieser Arbeit und ihrer Rahmenbedingungen kann hieraus allgemeineres Wissen über aktives und selbständiges Lernen von Mathematik in der Schule erwachsen (vgl. [30]).

Die Gruppe ist aus dem so genannten AZL Projekt (aktives und selbständiges Lernen), hervorgegangen; einem früheren Projekt des Instituts für Lehrer und Schule der Radboud Universität

[5] Mark van den Aarssen, Hanneke Abbenhuis, Herman Alink, Dr. Leon van den Broek, Sjoerd Crans, Dr. Maris van Haandel, Dr. Dolf van den Hombergh, Bart Jordens, Richard Klein Breteler, Jos Winkel.

Nimwegen mit Lehrern aus 18 Schulen und sieben Fachdidaktikern. Im Jahr 2001 habe ich die Gruppe von meinem Kollegen Dr. Lodewijk van Schalkwijk übernommen. In der Folge haben wir das Projekt *Schlau Spielen* oder *Spelen op een slimme manier* betrieben, auf das ich noch zurückkommen werde. Anschließend befasste sich die AZL Mathematikgruppe mit der Entwicklung einer Unterrichtsreihe zum Thema Zahlentheorie für Schüler aus 5 vwo (11. Schuljahr) mit einem mathematisch-naturwissenschaftlichen Profil. Der Unterricht und damit das Unterrichtsmaterial, das Lehrerhandbuch und die Forschungsveröffentlichungen entstand in Freudenthalscher Tradition durch Entwicklungsforschung. Nach meinem Weggang nach Köln im letzten Jahr hat Dr. Leon van den Broek die Leitung der Gruppe auf sich genommen. Sie ist noch immer aktiv.

Die Entscheidung der Lehrplankommission cTWO, durch das Fach *Mathematik D (wiskunde D)* wieder mehr authentische Inhalte in den Mathematikunterricht zu bringen, hatte für die Lehrer zur Folge, dass Sie diesen Unterricht gestalten mussten. Dazu wurde die AZL-Gruppe zu einer Kerngruppe, die in die Zusammenarbeit mit der Radboud Universität in Nimwegen, und insbesondere mit dem Astronomen Prof. Dr. Jan Kuijpers sich die Aufgabe gestellt hat, entsprechenden Unterricht zu entwickeln. Der Ausgangspunkt war, dass Jan Kuipers ein Thema aus seiner Praxis vorgestellt hat, von dem er dachte, man könne dies gleich im Unterricht behandeln. Als dann bei der ersten Begegnung des Astronomen mit den Mathematiklehrern deutlich wurde, dass man einander nicht versteht, wurde klar, dass hier einiges an Entwicklungsarbeit geleistet werden muss, will man dem hohen Anspruch tatsächlich genügen. Gleichzeitig zu der Entwicklungsarbeit in der Kerngruppe gab es eine Lehrerfortbildung (fünf Vernstaltungen im Jahr) mit etwa 70 Lehrern, denen Prof. Kuipers zu Beginn das Projekt vorgestellt hat und die während der Entwicklung die Möglichkeit bekamen Einfluss auf die Zwischenergebnisse zu nehmen, an deren Entwicklung sie auf diese Weise beteiligt wurden. In zwei Jahren entstand eine umfangreiche Unterrichtseinheit zu dem Thema Doppelplaneten, deren Entwicklung ich im ersten Jahr noch koordiniert habe. Nach meinem

Weggang ist die Entwicklungsforschung zu meiner großen Freude fortgesetzt worden und mittlerweile sehr weit gediehen und reif, im Unterricht eingesetzt zu werden[6] (siehe [25], [26]). Die Früchte dieser Arbeit würde ich gerne in Zukunft auch mit deutschen Lehrern auf die Bedürfnisse unseres Mathematikunterrichts zuschneiden.

Diese Vorgehensweise zu *wiskunde D* mit Wissenschaftler, Kerngruppe und Fortbildung haben wir gemeinsam mit den drei technischen Universitäten in Delft, Eindhoven und Twente im Rahmen des Verbundes *T(R)U's* durchgeführt. In diesem Verbund waren die TU's und die RU in Nimwegen die ersten, die Lehrern konkrete Unterrichtsbeispiele geben konnten, die tatsächlich aus einer Zusammenarbeit mit Universitäten entstanden sind.

5.2. **Mathematische Kreativität.** Eine weitere Voraussetzung für die Entwicklung mathematischer Begeisterung ist meines Erachtens die Erfahrung, mathematisch kreativ zu sein. Hierzu gibt es verschiedene Ansätze, die Schülern mehr oder weniger Gelegenheit geben, ihre Kreativität zu entdecken. Aber Vorsicht: Nicht alles, was nach Kreativität aussieht, ist es auch. Viele Formen von *Discovery Learning* oder *Stationenlernen* erinnern eher an das 'Verstecken von Ostereiern' (siehe [12]) als an authentische Kreativität, zu der immer eine aktive und autonome Rolle der Schüler gehört. Elaine Kyriacou ([31], Übers. des Verf.) formuliert dies so: „Im wesentlichen kann aktives Lernen beschrieben werden, als der Einsatz von Lernaktivitäten, den die Schüler sich zu einen bestimmten Grad zueigen machen und Kontrolle über die eingesetzten Lernaktivitäten bekommen, bei denen die Lernerfahrungen eher ein offenes Ende haben, als dass sie strikt vorherbestimmt sind, und bei denen der Schüler aktiv an der Lernerfahrung teilnimmt und diese mit gestaltet.".

Ansätze wie *Entdeckendes Lernen* [42] oder *Aufgabenvariationen im Mathematikunterricht* [38] bieten dahingegen sehr wohl Gelegenheiten für Kreativität im Mathematikunterricht. In der

[6]Es handelt sich um eine Unterrichtsreihe im Umfang von etwa 80 Schulstunden, die unter www.ratio.ru.nl/ bei AZL/wiskunde D zu finden ist.

Psychologie unterscheidet man zwischen *konvergenter* und *divergenter* Kreativität [15],[42]. Der klassische Mathematikunterricht spricht in erster Linie konvergente Kreativität an: zum Beispiel die Kreativität bei der Lösung einer vorgegebenen Aufgabe, die in der Regel zu einer oder einer überschaubaren Anzahl von Lösungen führt. Divergente Kreativität dahingegen ist eine Form freier Kreativität innerhalb eines vorgegebenen Rahmens, über die etwa ein Maler vor einer weißen Leinwand verfügen muss.

In unserer AZL-Arbeitsgruppe haben wir uns die Frage gestellt, ob und wie es möglich ist, auch divergente Kreativität in den Mathematikunterricht zu bekommen. Aus dieser Fragestellung ist das Projekt *Schlau Spielen* (siehe [1], [28] und www.ratio.ru.nl) durch Entwicklungsforschung hervorgegangen. Das wesentliche Merkmal dieser Unterrichtsreihe zur Spieltheorie von etwa 10 Schulstunden für Gymnasium und Realschule ist, dass die Schüler in Gruppen ihr eigenes (Nullsummen-) Spiel entwerfen, dass sie dann anhand eigener Fragen erforschen. Uns stellte sich die Frage, ob es gelingt die Schüler divergente Kreativität entwickeln zu lassen und wie der Lehrer diesen Prozess fachlich unterstützen kann. Auf beide Fragen haben wir konkrete Antworten gefunden und gezeigt, dass dies tatsächlich in der Praxis realisierbar ist.

Der Ansatz war möglich, da die Mathematik des Schlau-Spielen-Projektes nicht trivial aber trotz allem elementar war. Die meisten Fragen waren kombinatorischer Natur und ihre Betrachtung erforderte keine umfangreiche mathematische Technik und Hintergrundwissen. In unserem nächsten Projekt haben wir uns dann die Aufgabe gestellt, zu einem mathematischen Thema divergente Kreativität entstehen zu lassen, zu dem ein größeres Hintergrundwissen mit entsprechenden Fertigkeiten gehört. Hieraus ging das *Zahlenteufel-Projekt* [23] hervor.

„Warum bist du doch so misstrauisch?“ fragt der Zahlenteufel den träumenden Robert. Auch der Schriftsteller Hans Magnus Enzensberger lässt seinen Zahlenteufel [9] mathematische Geschichten erzählen, bei denen man immer gut aufpassen muss, ob sie denn auch wirklich stimmen. Robert, die Figur mit der sich so viele Leser und besonders Schüler identifizieren können, fragt: „Gut, du hast mir einige Tricks erzählt, das ist wahr. Aber ich frage mich: warum? Warum kommt mit den Tricks raus, was rauskommt? ... Und warum stimmt alles, was du sagst immer?“. „Ah, sagte der Zahlenteufel, so ist das. Du willst nicht nur herumspielen mit den Zahlen? Du willst wissen, was dahinter steckt? Die Spielregeln? Den Sinn des Ganzen? Mit einem Wort, du stellst dieselben Fragen wie ein richtiger Mathematiker.“

Der Zahlenteufel zeigt uns, wie man erfrischend direkt und alles andere als dogmatisch mit Zahlentheorie umgehen kann. Der Hintergrund eines Traums macht es möglich, abhängig vom mathematischen Sachverhalt, alles auftauchen und verschwinden zu lassen: Kaninchen, Kokosnüsse, beleuchtete Zahlendreiecke, schnellfließende Flüsse, etc. Die Kreativität, die nötig ist, Mathematik auf diese Art und Weise darzustellen, verlangt vor allem divergente Produktion. Da die gesamte Ausgestaltung der Geschichte durch die dahinterliegende Mathematik motiviert ist, ist dies mathematische Kreativität. Man kann einen solchen Traum nur erschaffen, wenn man die zugrundeliegende Mathematik gründlich verstanden hat und sie auf wesentliche Aspekte reduzieren kann.

Nach einigen vorbereitenden Aufgaben sollen dann die Schüler eine „Dreizehnte Nacht“ zu der Geschichte von Robert und dem Zahlenteufel schreiben. Dazu wird ihnen eine ganze Reihe zahlentheoretischer Themen angeboten, von denen sie eines auf kreative Weise in die metaphorische Sprache des Zahlenteufels übersetzen können. So haben wir divergente Kreativität von Schülern in der Zahlentheorie untersucht - einem auf jedem Niveau anspruchsvollen mathematischen Gebiet. Die Unterrichtsreihe findet als *praktischer Auftrag* statt, einer in vielen Schulfächern in den Niederlanden vorgeschriebenen Unterrichtsform mit einem Umfang von etwa zehn Unterrichtsstunden. Während ihrer Entwicklung wurde die Reihe in zwei Unterrichtszyklen in acht Klassen an drei Schulen unterrichtet.

5.3. **Begeisterung und Kreativität vorleben.** Unserer Entwicklungsarbeit liegt die Annahme zugrunde, dass wir unseren Schülern aktives selbstständiges Lernen nur beibringen können, wenn wir dies selbst auch praktizieren und, dass wir unsere Schüler mit dem begeistern können, was uns selbst begeistert.

In jeder Sitzung haben wir uns auch mit unseren eigenen mathematischen Fragen und Entdeckungen beschäftigt und begeistert. Jeder Mathematiklehrer sollte Mathematik mögen und sie betreiben, wenn sie/er Schüler begeistern will. Schon bei Polya ([37], Übers. des Verf.) finden wir: „Jeder verlangt, dass die Schule den Schülern nicht nur Information in Mathematik mitgeben sollte, sondern Know-How, Unabhängikeit, Originalität, Kreativität. Doch niemand fordert diese wunderbaren Dinge vom Mathematiklehrer – ist es nicht bemerkenswert?“. Meiner Arbeit liegt immer die Überzeugung zugrunde, dass neue mathematische Impulse im Unterricht nur dann erfolgreich die Schüler erreichen können, wenn auch ihre Lehrer sich aktiv damit beschäftigen. Die Projekte sind so angelegt, dass sie dazu die Gelegenheit geben. Polya sieht hier ein Problem: „Hier ist meiner Meinung nach das größte Problem im Fachwissen des durchschnittlichen Mathematiklehrers in der Schule: er hat keine Erfahrung mit aktiver mathematischer Arbeit und, deshalb, verfügt er nicht über wirkliche Beherrschung selbst des Schulstoffes, den er unterrichten soll.“ ([37], p.113). Aus diesem Grunde bemühen wir uns in Köln, unseren Studenten einen tieferen Einblick in die Mathematik zu geben und beurteilen sie auch danach, ob sie dem oben formulierten Anspruch gewachsen sind.

Mathematiklehrer stehen in einer Tradition, die viele tausende Jahre andauert und können daher nicht nur auf den Stoff vorbereitet werden, der im Moment im Unterricht behandelt wird. Sie müssen über einen mathematisch erwachsenen Blick auf den heutigen und zukünftigen Schulstoff verfügen. Auch, wenn wir nicht von allen Studenten dafür geliebt werden, sehe ich viele Studierende bei diesem Anspruch über sich hinaus wachsen und bin fest davon überzeugt, dass wir ihn um keinen Preis über Bord werfen sollten, wie das in Holland bei den Lehrern der Grund-, Haupt-, Real- und Gesamtschulen (*primair onderwijs* und *tweedegraads gebied*) zum schweren Schaden der mathematischen Kultur geschehen ist. Freudenthal zitiert in [10] eine Anzeige aus einem französischen Provinzblatt: „Ein Schwimmlehrer gesucht, der selber schwimmen kann.“

Zur mathematischen Kultur gehören schließlich auch besondere Ereignisse, oder *Happenings*, für Schüler. Das vom BMBF ausgerufene *Jahr der Mathematik* hat in dieser Hinsicht viel erreicht.

Mit dem *Kölner Mathematikturnier* im September haben wir in Köln einen Beitrag hierzu geleistet. Das Mathematikturnier ist ein *Mannschaftswettbewerb*, bei dem innerhalb der Teams diskutiert und mit anderen Teams verhandelt werden musste. Dadurch wird, anders als bei den meisten anderen Mathematikwettbewerben, die wichtige Funktion des mathematischen Diskurses in den Vordergrund gestellt. Das Turnier wurde vom Mathematischen Institut und unserem Seminar gemeinsam mit der Universität in Nimwegen durchgeführt. Die fruchtbare Zusammenarbeit mit dem mathematischen Institut sollten wir weiter fortführen und ausbauen.

5.4. **Sicher mit Mathematik.** Bei aller Selbstregulierung, Kreativität und Authentizität wird leicht eine unabdingbare Voraussetzung zur Entwicklung mathematischer Begeisterung vergessen: das Einüben mathematischer Algorithmen und Denkweisen. Wer Mathematik betreiben will, muss auf seine eigenen Rechnungen und sein eigenes Denken vertrauen können und dies erlernt man durch Üben. Das, was für die Schüler in anderen Bereichen, wie Sport oder Musik eine Selbstverständlichkeit ist, wird bei dem Versuch Mathematik attraktiv zu gestalten, in der Didaktik oft vergessen. Kinder – und gerade die mathematisch schwächeren – werden frustriert, wenn sie begeistert versuchen, eigene Fragen zu beantworten und dann feststellen müssen, dass sie nicht über die nötigen Mittel verfügen, sich diesen Fragen sinnvoll zu nähern. Freudenthal beschreibt die Rolle von Algorithmen: "Die Beherrschung von Algorithmen ist so entscheidend für den individuellen Entwicklungsprozess wie sie historisch für den der Menschheit gewesen ist. Algorithmen erlauben uns, eine längere Zeit automatisch zu handeln ohne die störende und verzögernde Interferenz des begreifenden Gedankens. Und dennoch, Algorithmen bringen es auf den Punkt: Beherrschung ist entweder vollständige Beherrschung oder keine. Weniger als hundertprozentige Beherrschung kann zur Folge haben, dass alles falsch ist. Natürlich, niemand ist unfehlbar – nicht einmal ein Computer. Beherrschung umfasst die Fähigkeit, die eigenen Fehler zu erkennen und zu korrigieren – einfache, wie Flüchtigkeitsfehler, und grundsätzliche, wie die

Anwendung eines Algorithmus auf Situationen, wo er nicht hingehört. Beherrschung, im übrigen, bedeutet die Fähigkeit, verloren gegangene Beherrschung wiedergewinnen zu können.“ (Übers. des Verf. aus [12])

Unabhängiges und autonomes Denken können Kinder nur dann erlernen, wenn Sie ihren eigenen Berechnungen und Argumenten trauen können. Rechnerische und argumentative Fertigkeiten zu lernen, verlangt diszipliniertes Üben. Wenn man das ehrlich ausspricht, ist das in der Regel kein Problem, da viele Schüler mit der Notwendigkeit des Übens sehr vertraut sind. Problematisch wird es nur dann, wenn Schüler den Eindruck haben, dass das Einüben von Algorithmen und Standardargumentationen, das Wesen der mathematischen Beschäftigung ausmacht.

Die Gefahr, dass Algorithmen ganz aus dem Unterricht verschwinden, ist höchst real: In den Niederlanden sind schriftliche Rechenverfahren aus dem Grundschulstoff verschwunden und werden durch so genanntes *schlaues Rechnen* und vor allem durch Berechnungen mit dem Taschenrechner ersetzt. Dabei Lernen die Kinder nachweisbar weniger als zuvor (antididaktische Omission) und gerade die Schwächeren werden dabei benachteiligt. Dies hat kürzlich noch die Auseinandersetzung zwischen Prof. Dr. Jan van de Craats [4] und Willem Uittenbogaart vom Freudenthal Institut in Utrecht [41] im *Nieuw Archief voor Wiskunde* eindrucksvoll gezeigt.

6. Beitrag der Mathematikdidaktik

Mathematikunterricht, dem unter all diesen Einflüssen gelingt, Begeisterung für Mathematik entstehen zu lassen, kann entwickelt, nachgewiesen und herausgearbeitet werden. Im wesentlichen gibt es zwei Herangehensweisen, mathematikdidaktische Einsichten über die Praxis des Unterrichts zu gewinnen: *empirische Forschung* und *Entwicklungsforschung.* In der empirischen Forschung führt die Wirklichkeit zu Beobachtungen, die mit Hilfe von Induktion zu Hypothesen erhoben werden. Durch Deduktion erhalten wir Vorhersagen in Situationen, die bisher nicht beobachtet wurden, und deren Gültigkeit in der Folge empirisch überprüft werden kann. Diese Überprüfung führt zu neuen Perspektiven in der

Beobachtung der Wirklichkeit, die ihrerseits wiederum zu neuen Hypothesen führen. Dieser Prozess, den man *empirischen Zyklus* nennt, führt zu Erkenntnissen, verändert jedoch die Praxis nur indirekt, wenn überhaupt.

6.1. **Mathematikdidaktische Entwicklungsforschung.** Im Gegensatz dazu orientiert sich die mathematikdidaktische Entwicklungsforschung ([43], [32]) an einem *Entwicklungs-* oder *Entwurfszyklus*, d.h. die Analyse eines Problems führt zu einer Diagnose. Auf der Grundlage dieser Diagnose wird ein Ansatz oder ein Entwurf für eine Lösung des Problems erstellt, der in der Folge mit Hilfe von Fachwissen implementiert und auf seine Tauglicheit überprüft wird. Die Evaluation der Implementation des Lösungsansatzes in der Wirklichkeit führt zu einer erneuten Analyse des Problems vor dem Hintergrund des gewählten Lösungsansatzes, womit man den Entwurfszyklus erneut durchlaufen kann. Die Erkenntnisse, die auf diese Art gewonnen werden hängen von den jeweiligen Problemen und Lösungsansätzen ab. Die Methode hat gegenüber dem empirischen Zyklus den Vorteil, dass sie in der Lage ist, Probleme nicht nur zu verstehen, sondern auch implementierbare Lösungsansätze zu entwickeln.

Es geht uns nicht nur darum, *Erkenntnisse* zum Unterricht zu sammeln, sondern diesen Unterricht anhand wissenschaftlicher Einsichten zu verbessern und erneut zu implementieren. Dabei können Unterricht, Curricula, Materialien usw. und die dazugehörige konzeptuellen Systeme entstehen.

Hans Freudenthal, Mathematiker und Mathematikdidaktiker, hat in seiner *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht* [11] eine Reihe von Aspekten vorgestellt, die seiner Einschätzung nach in einer noch zu errichtenden Wissenschaft vom Mathematikunterricht einst eine Rolle spielen sollten. Zuvor hat er die schädliche Wirkung und Begrenztheit der auch in den 70er Jahren schon populären quantitativen Bildungsforschung aufgezeigt – eine Kritik, die noch heute wörtlich auf einschlägige Unternehmungen zutrifft: Forschung muss relevant, konsistent und öffentlich sein. Quantitative Untersuchungen tragen

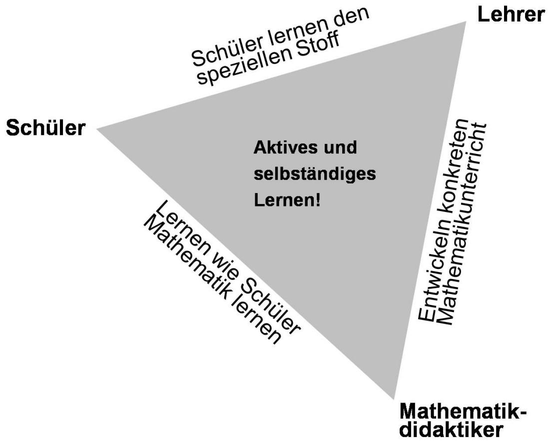

ABBILDUNG 2. Rollen und gemeinsame Interessen bei kollaborativer Interventionsforschung.

wenig zum Verständnis des Mathematikunterricht bei, solange wir kein qualitatives Verständnis von Mathematikunterricht besitzen.

In meiner Arbeit mit Lehrern orientiere ich mich an dem oben beschriebenen *Entwicklungszyklus*, der gemeinsam mit den beteiligten Lehrern auf gleicher Augenhöhe (*kollaborativ*) durchgeführt wird. Dabei habe ich durchaus die Absicht, Einfluss auf die Praxis des Mathematikunterichtes zu nehmen und zusammen mit den Lehrern diese Praxis in eine bestimmte Richtung zu verändern. Konrad Krainer [30] hat die hier skizzierte Arbeitsweise *kollaborative Interventionsforschung* (*Collaborative Intervention Research*) genannt.

6.2. **Mathematikdidaktisches Internetlabor.** Auch in Köln möchte ich diese Arbeitsweise mit Lehrern und Schülern fortsetzen. Dazu haben wir im letzten Semester mit dem Entwurf eines mathematikdidaktischen Internetlabors begonnen.[7]

[7]In Nimwegen habe ich einige Jahre an der Konzeption des Internetschulbuchs des Ratio-Projektes mitgearbeitet (www.ratio.ru.nl). Desweiteren bestehen Kontakte zum Wisweb des Freudenthal Institut in Utrecht wie auch dem Projekt MathAdore an der TU Eindhoven.

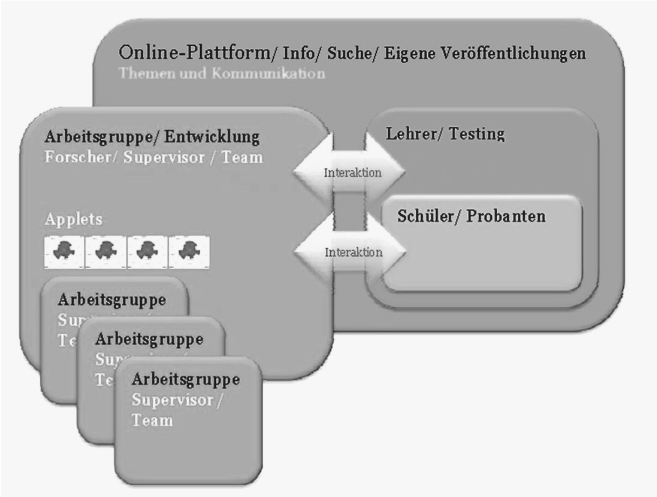

Abbildung 3. Struktur des mathematikdidaktischen Internetlabors

Sowohl in der mathematikdidaktischen Forschung als auch in der Ausbildung angehender Mathematiklehrer ist die Auseinandersetzung mit Unterrichtsmaterial im Fach Mathematik von zentraler Bedeutung. Anhand konkreter mathematikdidaktischer Fragestellungen soll Mathematikdidaktikern und LehrerInnen die Möglichkeit gegeben werden, kollaborativ in kleineren Gruppen ihre Materialien zu entwickeln, untereinander auszutauschen, zu verbessern und mit Erkenntnissen der didaktischen Forschung und Entwicklung abzustimmen. Auch Schüler können durch das Internet direkt erreicht und durch ansprechende Materialien für die Mathematik motiviert und begeistert werden.

Da Schulbücher eine solche Dynamik nicht haben, ist die Erstellung eines Internetlabors mit einem auf den Mathematikunterricht zugeschnittenen Redaktionssystem in Angriff genommen. Das Labor wird zunächst Projekte im Rahmen konkreter mathematikdidaktischer Fragestellungen durchführen. Es kann als Experimentierfeld für innovative Unterrichtsideen genutzt werden, die sowohl Lehrerinnen und Lehrer als auch Schülerinnen und

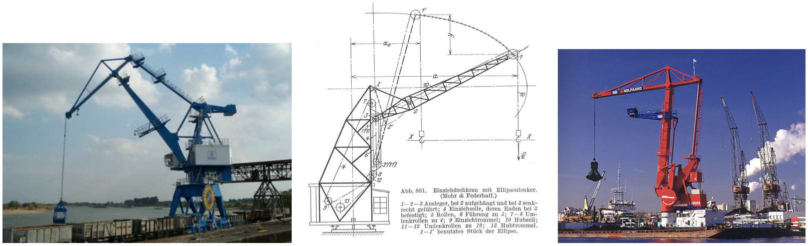

Abbildung 4. Lemniskaten-, Ellipsen- und *Floating level-luffing*-Kran

Schüler anregen und sie für die Mathematik begeistern. Gleichzeitig soll es unsere Bemühungen in der Lehre verstärken, Lehramtsstudenten mit über die übliche Schulbuchkultur hinausweisenden Unterrichtsentwürfen und Materialien bekannt zu machen und daran mitarbeiten zu lassen. Ein Internetportal mit einem auf den Mathematikunterricht zugeschnittenen Redaktionssystem bietet zudem eine verhältnismäßig einfache Art und Weise, Schüler und Lehrer direkt zu erreichen und der Früchte unserer Forschungs- und Entwicklungsarbeit teilhaftig werden zu lassen. Noch steckt dieses Projekt in den Kinderschuhen. Doch die Planungen sind soweit gediehen, dass jetzt mit der technischen Entwicklungsarbeit begonnen wird.

7. Noch etwas Mathematik

Zum Schluss möchte ich mit Ihnen noch etwas Mathematik betreiben. Als Mathematikdidaktiker sollten wir meiner Meinung nach die Mathematik *bei aller Didaktik* nie aus dem Auge verlieren. Der elementare Kontext der Lastkräne und Koppelkurven begeistert mich schon seit einiger Zeit und die Beschäftigung reicht von Geometrie, Kurven, Singularitäten, Ingenieursanwendungen bis hin zur Mathematikdidaktik. Lassen Sie mich versuchen, auch Sie hierfür zu gewinnen.

7.1. Einziehdrehkran mit Lemniskatenlenker. Wir beschränken uns hier auf so genannte *Lemniskatkräne* (*Floating lemniscate cranes*, *double boom cranes* oder *Einziehdrehkräne mit*

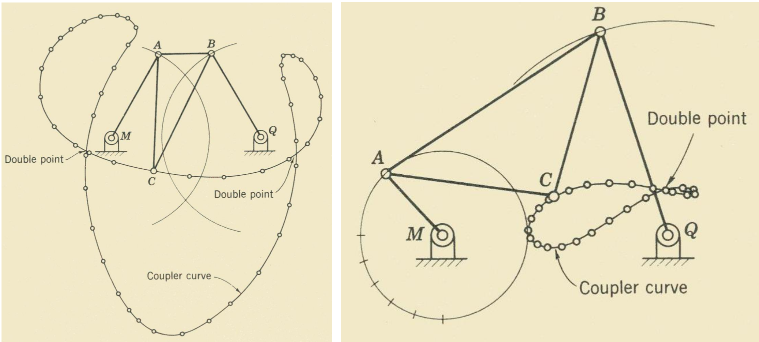

Abbildung 5. Konstruktion und Beispiel von Koppelkurven (aus [16])

Lemniskatenlenker). Dies sind moderne Kräne, die auf einem einfachen Prinzip beruhen, dem *Doppellenkerwippprinzip mit Lemniskatenlenker*, das in den 30er Jahren von den *ARDELT Werken* in Eberswalde (heute *KE Kranbau Eberswalde*) eingeführt wurde.

Es ist der Sinn einer solchen Konstruktion, Lastkräne mit mehr oder weniger horizontalem Lastweg zu bauen. Bei diesen Kränen muss keine große zusätzliche Kraft aufgewendet werden, um die Last in horizontaler Richtung zu bewegen. Es gibt viele verschiedene Konstruktionen dies zu erreichen.

Bei den Lastkränen handelt es sich um einen authentischen Kontext. Solche Kräne sind in allen großen Häfen zu finden und sie werden auch heute noch von Ingenieuren konstruiert (siehe [36]).

7.2. **Gelenkvierecke und Koppelkurven.** Der Basismechanismus der Lemniskatkräne beruht auf einem *Koppelmechanismus*, den man sich immer vorstellen kann als ein Gelenkviereck, mit einer fixierten Stange, dem *Steg*. Die gegenüberliegenden Stange, die so genannte *Koppelstange*, ist dann die Basis AB eines Dreiecks, dessen dritter Punkt C relativ fest zur Koppelstange bleibt. Die Spur dieses Eckpunktes C nennt man *Koppelkurve*. Das Dreieck $\triangle ABC$ kann dabei auch degeneriert sein, d.h. C

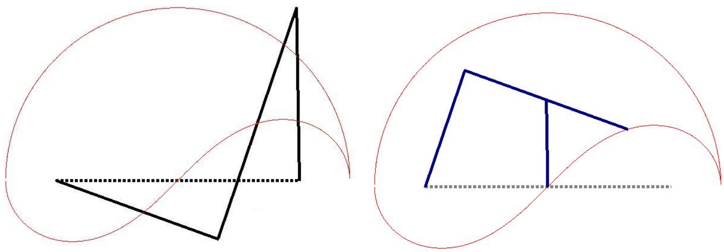

Abbildung 6. Zwei Konstruktionen der Bernoullischen Lemniskate als Koppelkurve.

kann auf der Geraden durch AB liegen. Die klassische Lemniskate von Bernoulli kann auf zwei Arten und Weisen als Koppelkurve mit degeneriertem Dreieck erzeugt werden (siehe Abb. 6). Koppelmechanismen treten in vielen Maschinen und technischen Konstruktionen auf (siehe [16] und [2]). Sie sind an vielen Stellen im Unterricht einsetzbar [22].

7.3. **Singularitäten von Koppelkurven.** Zum Verständnis dieser Koppelkurven ist es wichtig, zu wissen, wo sich ihre möglicherweise vorhandenen Singularitäten befinden. Dabei gibt es *Doppelpunkte*, d.h. Stellen durch die der Punkt C zweimal aus verschiedenen Richtungen durch den Punkt hindurchläuft und *Spitzen*, wo der Punkt C sich in eine Richtung bewegend abrupt umkehrt. Aus mathematischer Perspektive sind beides Punkte, in denen es nicht gelingt eine *Tangente* an die Kurve zu legen, da sie an diesen Stellen nicht *glatt* ist.

Für die Lage der Doppelpunkte gibt es einen sehr schönen elementargeometrischen Satz in der Ingenieurwissenschaft (siehe [16] und [35]). Falls wir einen Koppelmechanismus gegeben haben, wie in der Abbildungen 5 und 7, wobei A, B und C nicht auf einer Geraden liegen, definieren wir den *Pivotkreis* dieses Koppelmechanismus als den Kreis, durch die Punkte M, Q und O wobei O so gewählt ist, dass das Dreieck $\triangle MQO$ ähnlich ist zu $\triangle ABC$.

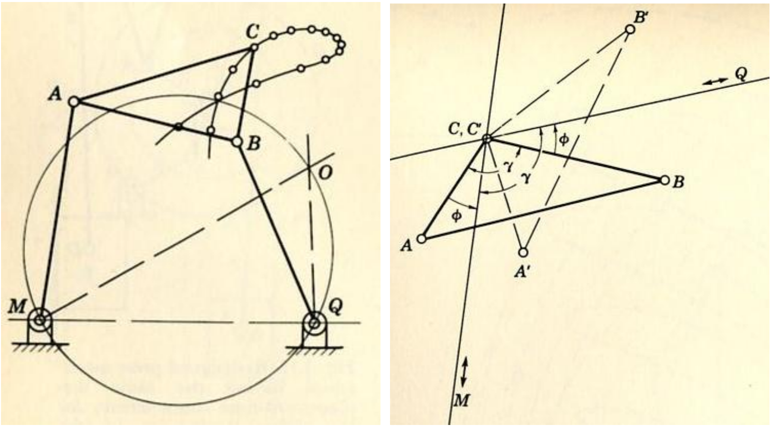

Abbildung 7. Definition eines Pivotkreises und Beweisskizze (aus [16])

Falls A, B und C doch auf einer Geraden liegen, nennen wir die Gerade durch M und Q die *Pivotgerade*[8].

> Die Doppelpunkte, d.h. Punkte, die durch zwei unterschiedliche Positionen des Koppelmechanismus erreicht werden können, liegen alle auf dem Pivotkreis oder der Pivotgeraden (siehe Abb. 7).

Denn angenommen, wir haben einen Doppelpunkt. Dann gibt es zwei verschiedene Positionen des mit der Koppelstange verbundenen Dreiecks: $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ wobei $C = C'$ der Doppelpunkt ist. Der feste Punkt M muss nun auf der Winkelhalbierenden von $\angle ACA'$ zu finden sein, da $MA'CA$ ein Drachenviereck formt. Genauso muss sich Q auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\angle BCB'$ befinden. Hieraus folgt, dass $\angle MCQ$ entweder gleich $\angle ACB$ ist oder gleich $180° - \angle ACB$ ist.

Falls wir uns nun umgekehrt bei gegebenen Punkten M und Q den geometrischen Ort aller Punkte S anschauen, für die $\angle MSQ$ entweder gleich $\angle ASB$ ist oder gleich $180° - \angle ASB$, dann finden

[8]Das französische Wort *pivot* bezeichnet so etwas wie Drehpunkt. In einem Koppelmechanismus wie in Abb. 7 sind hiermit die Punkte M und Q gemeint.

wir mit Hilfe des Umkreiswinkelsatzes genau den Pivotkreis bzw. die Pivotgerade.

7.4. **Spitzen.** Auf einem *Internationalen Känguru Camp* mit talentierten Schülern in der Kranbaustadt Eberswalde, bei der Masterclass *Wiskundig Denken* für Schüler an der Radboud Universität Nimwegen und beim *Wiskunde B-dag 2004* haben Herr Dr. Leon van den Broek und ich uns mit Koppelkurven beschäftigt.

Eine Zeit lang habe ich mich – und andere – gefragt, ob man denn auch eine ähnliche elementare Aussage wie über die Doppelpunkte auch über die Spitzen treffen kann. Und in der Tat, jetzt weiße ich, dass das geht.

Als Aufgabe zum entdeckenden Mathematiklernen, hatte Leon van den Broek vorgeschlagen, sich ein Gelenkfünfeck $MACBQ$ anzuschauen, bei dem die Punkte M und Q als fest angenommen werden. Man kann sich fragen, welches Gebiet G der Punkt C auf diese Weise erreichen kann. G entsteht als Schnittmenge zweier ringförmiger Gebiete, d.h. $G = (D_1 \setminus D_1') \cap (D_2 \setminus D_2')$, wobei D_1 und D_1' Kreisscheiben um M und D_2 und D_2' Kreisscheiben um Q sind (siehe Abb. 8). Diese, mir ehrlich gesagt zunächst etwas langweilig scheinende, Aufgabe ist für jeden Schüler zu bewältigen und kann sehr schön mit mechanischen Hilfsmitteln unterstützt werden. Doch diese Aufgabe bietet auf verschiedene Weisen Raum für Fragen und Entdeckungen, wie uns die Schüler an verschiedenen Beispielen gezeigt haben.

Ich selbst habe dabei entdeckt, dass all die Punkte in G, bei denen der Abstand der Punkte AB einen festen Wert behält, jeweils eine Koppelkurve formen. Die Vereinigung all dieser Kurven formt das Gebiet G. Wenn man die Situation untersucht, sieht man, dass die Koppelkurven die die *Eckpunkte* von G erreichen, eine Spitze haben müssen.

Und, dies sind die einzigen möglichen Spitzen. Denn wenn wir versuchen eine Sekante g durch C und C' an eine Koppelkurve zu zeichnen, dann benötigen wir zwei Positionen des Dreiecks $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$, wobei C nicht gleich C' sein darf – auch wenn wir uns vorstellen, dass wir C' beliebig nahe an C gewählt ist. Zu zwei kongruenten Dreiecken gibt es aber immer eine Drehung ρ,

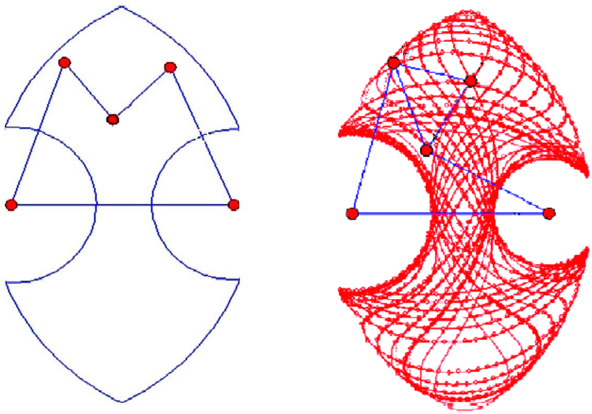

Abbildung 8. Das Gebiet G ausgefüllt mit Koppelkurven

die $\triangle ABC$ in $\triangle A'B'C'$ überführt. Den zugehörigen Drehpunkt R findet man als Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AA', die auch durch M verläuft und der Mittelsenkrechten BB', auf der sich auch Q befindet. Da diese Drehung ρ auch C in C' überführt, ist die Sekante g senkrecht zur Mittelsenkrechten von CC'. Da ρ die Dreiecke $\triangle ABC$ in $\triangle A'B'C'$ ineinander überführt, finden wir den Drehpunkt R als Schnittpunkt der Geraden durch MA und QB. Falls nun C' gegen C strebt, wird die Sekante durch CC' zur Tangenten an C, die man nun als die zu RC senkrechte Gerade durch C konstruieren kann.

Schließlich kann man sich fragen, wann die obige Konstruktion misslingt: da gibt es eine Singularität. Das ist genau dann der Fall, wenn der Drehpunkt R mit dem Punkt C zusammenfällt. Das wiederum geschieht genau dann, wenn sowohl M, A, C als auch Q, B, C kollinear sind, d.h. auf einer Geraden liegen. M, A, C liegen auf einer Geraden, falls C auf dem Rand des ringförmigen Gebietes $(D_1 \setminus D_1')$ liegt und QBC ist kollinear, falls C auf dem Rand von $(D_2 \setminus D_2')$ zu finden ist. Die Schnittpunkte der beiden Ränder sind genau die Eckpunkte des Gebietes G.

Die Darstellung dieses Sachverhaltes beruht auf einigen Annahmen, wie etwa den Betrachtungen zum Grenzübergang und

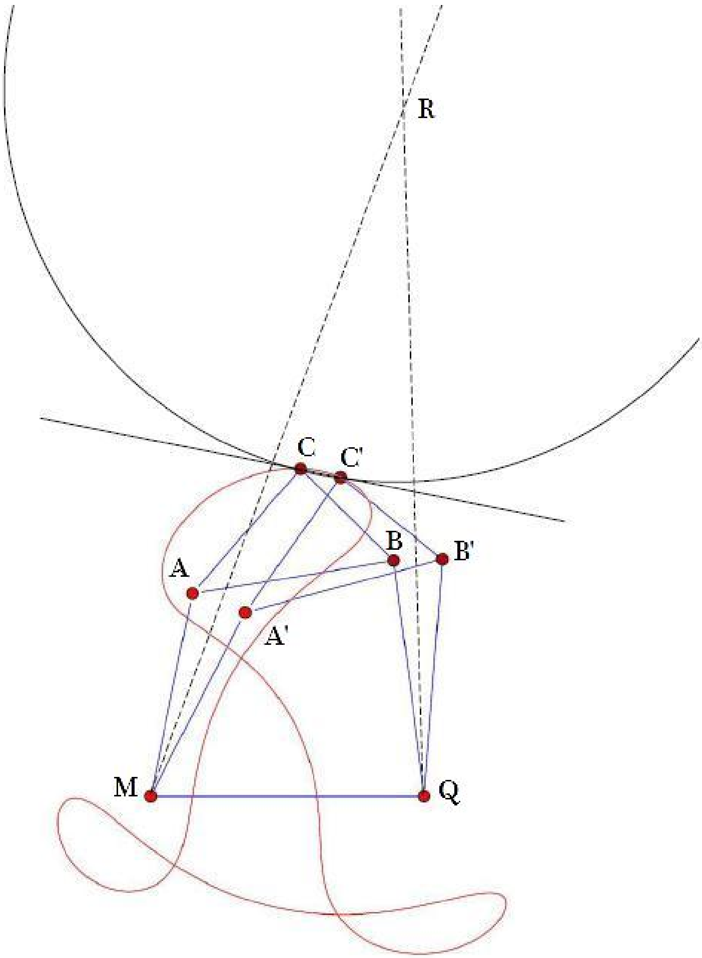

Abbildung 9. Konstruktion einer Sekanten an eine Koppelkurve

ist nicht in ein axiomatisches System eingebettet. Und doch ist sie in der Lage, die zugrunde liegende Mathematik so zu ordnen, dass sie zur überzeugenden Beantwortung der Ausgangsfrage dient. Das Thema ist zunächst jedem Kind zugänglich (siehe etwa [7]) und besitzt danach jede beliebige Tiefe, wie etwa die

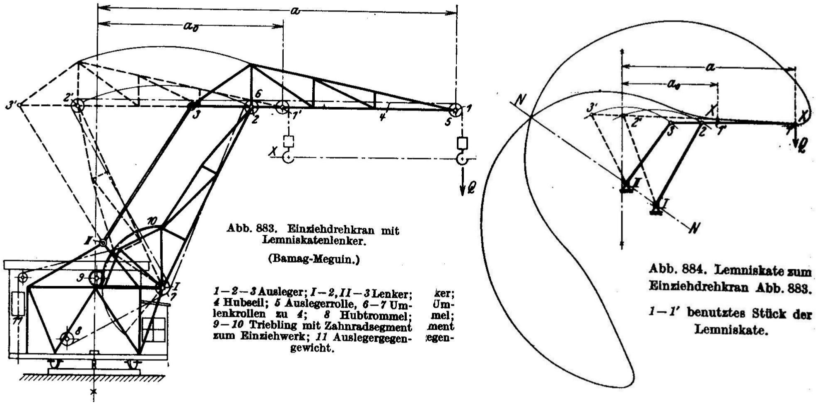

ABBILDUNG 10. Einziehdrehkran mit Lemniskatenlenker aus [17]

Betrachtung der Darboux Abbildung [2], [5], die einem Gelenkviereck eine elliptische Kurve zuordnet, und deren Anwendung auf Kräne [21], [20], [24], oder die allgemeine Repräsentation reeller Kurven durch Stangenkonstruktionen [3].

LITERATUR

[1] VAN DEN AARSSEN, M., ALINK, H., VAN DEN HOMBERGH, A., JORDENS, B., KAENDERS, R., KLEIN BRETELER, R., TACKEN, C. (2004). *Spelen op een slimme manier.* Nieuwe Wiskrant 23(4), 10-16.

[2] W. BLASCHKE, H.R. MÜLLER (1956). *Ebene Kinematik.* Verlag von R. Oldenbourg, München.

[3] BURMESTER, L. (1888). *Lehrbuch der Kinematik*, Arthur Felix Verlag, Leipzig.

[4] VAN DE CRAATS, J. (2007). *Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen.* Nieuw Archief voor Wiskunde, 5/8 nr. 2.

[5] M.G. DARBOUX (1879). *De lémploi des fonctions hyperelliptiques dans la théorie de quadrilatère plan*, Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, Gauthiers-Villars, Paris, 109-128.

[6] DÖRFLER, W. (2003). *Mathematics and Mathematics Education: Content and People, Relation and Difference.* Educational Studies in Mathematics, 54: 147-170.

[7] ENGEL, A. (1971). *Geometrical Activities for the Upper Elementary School.* Educational Studies in Mathematics 3, 353-394.

[8] Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education.* Routledge/Falmer
[9] Enzensberger, H.M. (1999). *Der Zahlenteufel.* Deutscher Taschenbuch Verlag, München.
[10] Freudenthal, H. (1973). *Mathematik als pädagogische Aufgabe.* Band 1,2, Klett, Stuttgart.
[11] Freudenthal, H. (1978). *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht.* Mathematik - Didaktik und Unterrichtspraxis, Oldenbourg, München Wien.
[12] Freudenthal, H. (1991). *Revisting Mathematics Education, China Lectures.* Kluwer Academic Publishers, Doordrecht.
[13] Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Kluwer Academic Publishers, Doordrecht.
[14] Gardiner, A. (2004). *What is mathematical literacy?* Paper presented at the ICME-10, 4.-11. July, Copenhagen.
[15] Guilford, J.P. (1950). *Creativity.* The American Psychologist, 444 - 454.
[16] Hall, A.S. (1961). *Kinematics an Linkage Design*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J..
[17] Hänchen, R. (1932). *Winden und Krane, Aufbau, Berechnung und Konstruktion.* Verlag Julius Springer, Berlin.
[18] E. Husserl (1936) *Die Krisis der europäischen Wissenschaften und die transzendentale Phänomenologie: Eine Einleitung in die phänomenologische Philosophie.* Hrsg. E. Ströker, Hamburg 1982.
[19] Jahnke, T, Meyerhöfer W. (Hrsg.) (2007). *PISA & Co – Kritik eines Programms.* Franzbecker, Hildesheim (2.Aufl.).
[20] Kaenders, R.H. (2005). *Kranen en Lemniscaten*, in *De schijf van vijf*, Syllabus CWI vakantiecursus, 136 pages, ISBN 90 6196 531 4.
[21] Kaenders, R.H. (2006). *Kräne und Lemniskaten*, Beiträge zum Mathematikunterricht, GDM Tagung, Osnabrück.
[22] Kaenders, R.H. (2006). *Kräne und Lemniskaten.* Beiträge zum Mathematikunterricht, GDM Tagung Universität Osnabrück, Hildesheim: Franzbecker.
[23] Kaenders, R.H. (2006). *Zahlbegriff zwischen dem Teufel und der tiefen See.* Der Mathematikunterricht, 52(5).
[24] Kaenders, R.H. (2007). *Lemniscaten en Kranen.* Nieuw Archief voor Wiskunde, 5de serie, deel 8, nr.2. (112-118).
[25] Kaenders, R. (2007). *Dubbelplaneten.* Nieuw Archief voor Wiskunde, 5de serie, 8(4), 287-298.
[26] Kaenders, R. (2007). *Kreiseln im Weltraum: Lehrerforschung zwischen Wissenschaft und Schulpraxis.* Beiträge zum Mathematikunterricht, Hildesheim: Franzbecker.
[27] Kaenders, R., Jaap Top, J. (2007). *Het zit hem in de derde klas.* Nieuw Archief voor Wiskunde, vijfde serie, deel 4, nr. 4.

[28] KAENDERS, R. (2007). *Play it smart: towards a more autonomous teaching an learning of mathematics.* Preprint on www.kaenders.uni-koeln.de.

[29] KEMPE, A.B. (1849). *How to draw a straight line*, National Council of Teachers in Mathematics, Classics in mathematics education, 6, 1977.

[30] KRAINER, K. (2003). *Editorial; Teams, Communities & Networks.* Journal of Mathematics Teacher Education, 6, 93-105.

[31] KYRIACOU C. (1992). *Active Learning in Secondary School Mathematics.* British Educational Research Journal, 18(3), 309-318.

[32] LESH, R. (2005). MATHEMATICS EDUCATION AS A DESIGN SCIENCE. Zentralblatt der Didaktik der Mathematik, 37 (6).

[33] LUTZ-WESTPHAL, B. (2006). *Kombinatorische Optimierung – Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht.* Dissertation, TU Berlin.

[34] MÜLLER, G.N., STEINBRING H. UND WITTMANN, E. CH. (2002). *Jenseits von PISA, Bildungsreform als Unterrichtsreform. Ein Fünf-Punkte-Programm aus systemischer Sicht.* Seelze: Kallmeyer.

[35] MÜLLER R. (1889 und 1891) *Ueber die Doppelpunkte der Koppelcurve.* Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 34 (S. 303 u. S. 372), Bd. 36 (S.11 u. S. 65).

[36] NIEUWENHUIS, G. (2006). *De lemniscaatkraan*, Nieuw Archief voor Wiskunde, vijfde serie, 7(3).

[37] POLYA G. (1965). *Mathematical discovery II.* Wiley & Sons.

[38] SCHUPP, H. (2002).*Thema mit Variationen – Aufgabenvariation im Mathematikunterricht.* Verlag: Franzbecker Hildesheim, Berlin.

[39] SWAEN, M. (2006). *De wiskunde van Hans de Rijk.* Pythagoras, september 2006

[40] VAN SCHALKWIJK, L., BERGEN, T., VAN ROOIJ, A. (2000). *Learning to prove by investigations: a promising approach in Dutch secondary education*, Educational Studies in Mathematics, 43, 293-311.

[41] UITTENBOGAARD, W. (2008). *Geen catechismus leren, maar nadenken.* Nieuw Archief voor Wiskunde, 5/9 nr. 1.

[42] WINTER, H. (1989). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht : Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik.* Vieweg Braunschweig Wiesbaden.

[43] WITTMANN E.CH. (1995). *Mathematics Education as a „Design Science“.* Educational Studies in Mathematics 29, 355-374.

[44] WITTMANN E.CH. (2005). *Realistic Mathematics Education, past and present.* Nieuw Archief voor Wiskunde, vijfde serie, deel 6, nr. 4.

[45] WITTMANN, E.CH. (2005). *Eine Leitlinie für die Unterrichtsentwicklung vom Fach aus: (Elementar-) Mathematik als Wissenschaft von Mustern.* Der Mathematikunterricht, 51 (2/3), 5-22.