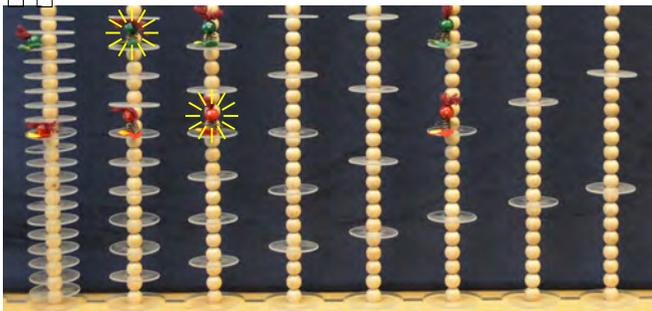


## Gemeinsame Teiler

Zwei Wichte wohnen in zwei unterschiedlichen Treppenhäusern auf Etagen unterschiedlicher Höhe. Um sich einfacher besuchen zu können, suchen sie ein Treppenhaus mit Etagen, in die sie beide einziehen können, ohne jedoch ihre gewohnte Etagenhöhe aufgeben zu müssen. Praktisch wie sie veranlagt sind, sollen möglichst wenige Etagen zwischen ihren Etagen liegen, so dass sie sich im Treppenhaus mit möglichst wenigen – dafür lieber großen – Hüpfern besuchen können. Der Abstand zwischen zwei Etagen in ihrem gemeinsam bezogenen Treppenhaus entspricht dem größten gemeinsamen Teiler ihrer beiden Etagenhöhen. Offenkundig gibt es mit dem 1er-Treppenhaus immer mindestens eine Möglichkeit, in ein gemeinsames Treppenhaus zu ziehen. Die Frage ist, ob dem damit verbundenen kleinschrittigen Etagenwechsel entronnen und welche optimale Lösung gefunden werden kann. Sind die Etagenhöhen in zwei Treppenhäusern echt teilerfremde Zahlen (besitzen also keinen gemeinsamen Teiler außer 1), ist die Suche vergeblich. Ist die Etagenhöhe in dem einen Treppenhaus Teiler der Etagenhöhe in dem anderen Treppenhaus, ist die Lösung, sich einfach für dasjenige der beiden Treppenhäuser mit dem größeren Etagenabstand zu entscheiden. Sind diese beiden Fälle nicht gegeben, liegt also keine Beziehung der Teilerfremdheit wie auch keine der Vielfachheit vor, lohnt sich die Suche – beginnend mit dem 2er-Treppenhaus – in welchen der Treppenhäuser die beiden gewünschten Etagenhöhen vorhanden sind. Die Etagen in demjenigen dieser Treppenhäuser mit dem größtmöglichen Etagenabstand werden zum Einzug gewählt.



Nehmen wir an, ein grüner Wicht wäre ursprünglich im 2er-Treppenhaus auf der Etage in Höhe 18 eingezogen, ein roter Wicht im 3er-Treppenhaus auf Höhe 12. Dann führt die Erkundung zur Lösung, geeigneter Weise ins 6er-Treppenhaus umzuziehen.



Der Flyer wie auch weitere Infos sind im web frei erhältlich. Darunter auch ein Arbeitsblatt, das eine graphische Darstellung des Zahlen-Hochhauses bietet. Hier können Positionen sowohl angemalt als auch mit eigenen Spielfiguren bespielt werden.

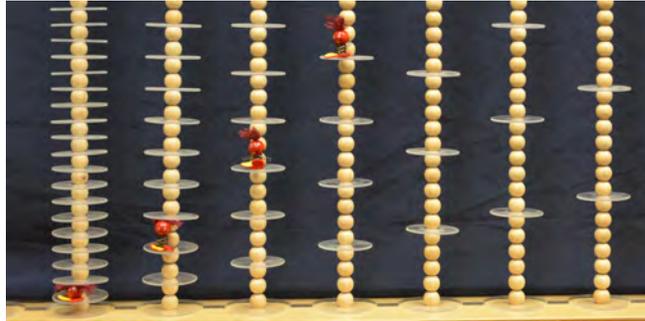
<https://mathedidaktik.uni-koeln.de/mitarbeiterinnen/prof-dr-inge-schwank>

\*) Möglicher Erklärungsansatz: Die Zahlen in der 4er-Reihe sind gerade, also muss mit Blick auf die 5er-Reihe die gesuchte Zahl um vier niedriger sein als eine Zehnerzahl. Mit Blick auf die 3er-Reihe ist diese Zehnerzahl eins höher als eine Dreierzahl. 9 als Dreierzahl passt nicht, da 10-4 keine Viererzahl ergibt, dafür passt (als erste Möglichkeit) 39.

## Ausblick für Interessierte

Quadratzahlen sind diejenigen Zahlen, die sich ergeben, wenn eine Zahl mit sich selbst multipliziert wird, z.B.  $0=0\cdot 0$ ,  $1=1\cdot 1$ ,  $4=2\cdot 2$ ,  $9=3\cdot 3$ ,  $16=4\cdot 4$  ...

Im Zahlen-Hochhaus können sie aufgesucht werden, indem die Wichte in ihrem jeweiligen Treppenhaus so oft nach oben hüpfen, wie es ihrer jeweiligen Hüpfhöhe pro einzelner Hüpf (Perlenabstand zwischen zwei Plattformen) entspricht.



Zwei Wichte, die in benachbarten Treppenhäusern auf ihren jeweiligen Quadratzahlhöhen stehen, können leicht einen Ort finden, um eine Party zu feiern. Derjenige, der tiefer steht, macht dazu einen Hüpf nach oben, derjenige, der höher steht, einen Hüpf nach unten. Z.B. gelangt so der 2er-Wicht von  $4=2\cdot 2$  auf  $6=3\cdot 2$  und der 3er-Wicht von  $9=3\cdot 3$  auf  $6=2\cdot 3$ . Es stellt sich heraus, dass der Abstand zwischen zwei benachbarten Quadratzahlen eine ungerade Zahl ist. Der Weg bis zu einer Quadratzahl kann also – statt eines Quadrierens – entlang der Hüpfbewegungen eines Wichtes „eine Etage nach oben, Wechsel in die Etage im benachbarten rechten Treppenhaus, eine Etage nach oben“ auch so beschrieben werden:

$1+(1+2)+(2+3)+(3+4)+\dots$  oder auch  $1+3+5+7+\dots$

Ein einzelner Wicht kann so, beginnend im 1er-Treppenhaus, durch fortgesetzte Additionen alle Quadratzahlen einfach aufsuchen, wobei er zwischendurch die beschriebenen Party-Orte zum Wechsel ins jeweils nächste Treppenhaus ausnutzt.

Das Ergebnis dieses Zurechtlegens hilft bei der Beantwortung folgender weiterführender Frage: Ist es möglich, dass der Abstand zwischen zwei benachbarten Quadratzahlen seinerseits eine Quadratzahl ist ( $x^2+y^2=z^2$ )? Offenkundig ja: es gibt sogar unendlich viele Möglichkeiten, da sich aus jeder ungeraden Zahl durch Quadrieren eine neue ungerade Quadratzahl herstellen lässt.

Zur dritten binomischen Formel führt die Beobachtung, dass sich zu Etagen in Quadratzahlhöhe in den jeweiligen links und rechts benachbarten Treppenhäusern Etagen befinden, deren Höhe diesbezüglich um eins geringer ist. Zu entdecken gibt es noch vieles mehr. Mathematische Strukturen sind reichhaltig.

Schwank, Inge (2018): 2. überarbeitete und erweiterte Auflage  
Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik

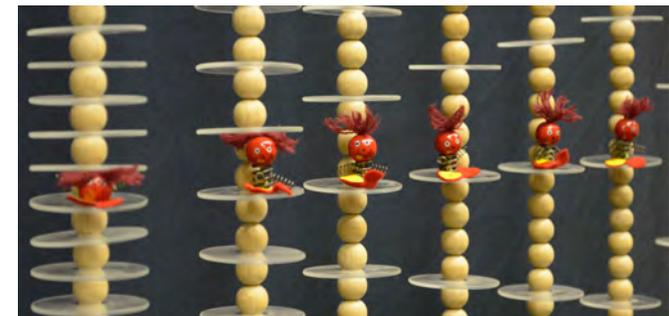


## Treffpunkt

### »Mathematische Frühförderung«

Wissenschaftliche Leitung: Prof. Dr. Inge Schwank  
Institut für Mathematikdidaktik  
Universität zu Köln

# Zahlen-Hochhaus



Mathematische Spielwelt  
zur Erforschung von Zahlen  
in ihren  
multiplikativen Zusammenhängen

## Zahlen-Hochhaus: Aufbau

Von besonderem Interesse hinsichtlich der frühen Entwicklung mathematischen Denkens ist die Erforschung **multiplikativer Zusammenhänge**. Die Mathematische Spielwelt **Zahlen-Hochhaus** ist dafür geeignet. Das Zahlen-Hochhaus besteht aus sogenannten Treppenhäusern, die passend zu den Multiplikations-Reihen aufgebaut sind – und zwar anders als sonst üblich – beginnend mit der Zahl 0 als eigene Reihe und den Nullfachen in allen Reihen.



Im Anfangstreppehaus, welches die Reihe

$0 \cdot 0, 1 \cdot 0, 2 \cdot 0, \dots$

repräsentiert, gibt es überhaupt keine Perlen, sondern lediglich eine Plattform zu Beginn. Ein Aufstieg ist hier nicht möglich. Es folgen die Treppenhäuser für die Reihen

$0 \cdot 1, 1 \cdot 1, 2 \cdot 1, \dots$  bis  $0 \cdot 10, 1 \cdot 10, 2 \cdot 10, \dots$

Jedes von ihnen besteht aus 100 Perlen, die durch die eingesetzten Plattformen jeweils eine bestimmte multiplikative Struktur erhalten. Mit den Plattformen sind die in den Treppenhäusern erreichbaren Etagen festgelegt. Ihre Abstände entsprechen den jeweiligen Multiplikations-Reihen. Wie das Anfangstreppehaus beginnt auch jedes der weiteren Treppenhäuser mit einer untersten Plattform in Höhe 0.

## Wichte und ihre Partys

Im Zahlen-Hochhaus sind smarte Wichte unterwegs. Sie interessieren sich dafür, in welchen Höhen sie in den unterschiedlichen Treppenhäusern Etagen beziehen können. Gelegentlich markiert ein Wicht einen seiner Zahlenschuhe, um anzuzeigen, in genau welchem der Treppenhäuser er eine Etage bezieht. Der abgebildete Wicht ist auf einer Etage im Treppenhäuser der 4er-Reihe eingezogen. Mit Blick auf die Nachbartreppenhäuser, ist es z.B. möglich herauszufinden, wie viele Perlen unter ihm sind. \*)



Durch die Beschriftung seines einen Schuhs mit 4 ist er zum 4er-Wicht geworden. Beginnend mit der untersten Etage des 4er-Treppenhäuses, seinem Erdgeschoss, kann der 4er-Wicht zu weiteren 4er-Etagen hochhüpfen. Zu Beginn ist er 4 Perlen hochgehüpft, er befindet sich also auf der Etage in Höhe 4. Hüpf er nun 4 Perlen hoch, erreicht er die Etage in Höhe 8. Hüpf er nochmal 4 Perlen hoch, also insgesamt 8 Perlen, erreicht er die Etage in Höhe 12, usw.

Wichte mit unbeschrifteten Zahlenschuhen legen sich nicht auf ein Treppenhäuser fest. Sie interessieren sich dafür, von einem Treppenhäuser in ein anderes zu gelangen. Ein solcher Wechsel ist möglich, wenn sich in verschiedenen Treppenhäusern Etagen auf gleicher Höhe befinden. Z.B. kann von einem Erdgeschoss aus in jedes der anderen Erdgeschosse gewechselt werden, auch in dasjenige im 4er-Treppenhäuser. Egal in welchem Treppenhäuser sich ein Wicht in welcher Etage befindet, kann er immer in eine Etage gleicher Höhe im 4er-Treppenhäuser wechseln! Durch die wiederholte Addition von 4 sind alle Zahlen erreichbar. Andere Wechselmöglichkeiten sind durch weiterführende Überlegungen erschließbar.

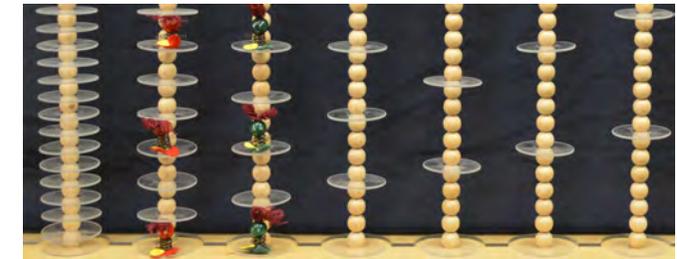
Die Wichte feiern gerne Partys. Partys sind für solche Wichte möglich, die sich zwar in unterschiedlichen Treppenhäusern befinden, dort aber auf Etagen in gleicher Höhe eingezogen sind. Bedingt durch die Struktur des Zahlen-Hochhauses, d.h. des hier innewohnenden tatsächlichen mathematischen Zahlenaufbaus, kann erschlossen werden, dass die Partys manchmal kleiner, manchmal größer ausfallen. Es gilt Möglichkeiten zu erkunden, die u.a. sowohl Partymuffel als auch Partybegeisterten gerecht werden. Der 1er-Wicht ist immer dabei. Im Erdgeschoss können alle mitmachen, sogar der 0er-Wicht.

## Spielmöglichkeiten

Wird das Verständnis der Zahlen und damit des Zahlenraumes zunächst durch deren untereinander vorliegenden additiven und subtraktiven Beziehungen bestimmt, kommen nun weitere Erkenntnisse hinzu. Die Beschäftigung mit den Interessen der smarten Wichte im Zahlen-Hochhaus fördert die Entwicklung des Zahlenverständnisses, insofern neue Bezüge zwischen den Zahlen ausgemacht und untersucht werden können. Zahlen können im Zusammenhang einer Multiplikation oder Division stehen, sie können Vielfache und Teiler sein, Primzahlen, Quadratzahlen und vieles mehr. So kann eine Zahl auch ein gemeinsames Vielfaches oder ein gemeinsamer Teiler von mehreren Zahlen sein, insbesondere gibt es kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) und größte gemeinsame Teiler (ggT).

## Gemeinsame Vielfache

Auf welchen Etagen können der 2er-Wicht und der 3er-Wicht eine Party feiern? Hüpfen die beiden Wichte in ihren Treppenhäusern hoch, stellen sie fest, dass sie sich nur ab und an auf einer Etage in derselben Höhe begegnen. Diese Höhen sind 0, 6, 12, 18, ... nicht aber 2, 4, 8, 10, ... oder auch nicht 3, 9, 15, 21, ...



Bei ihren Party-Höhen handelt es sich um die gemeinsamen Vielfachen von 2 und 3, z.B.  $6=3 \cdot 2$  bzw.  $6=2 \cdot 3$  oder  $12=6 \cdot 2$  bzw.  $12=4 \cdot 3$ . Es gibt unbegrenzt viele Möglichkeiten für die beiden, eine Party zu feiern, wenn die Treppenhäuser beliebig weit nach oben ausgebaut werden. Die vom Erdgeschoss abgesehen erste Möglichkeit für sie, eine Party zu feiern, ist auf der Etage in Höhe 6. Diese Höhe ist das kleinste gemeinsame Vielfache von 2 und 3. Von dort aus geht es für die beiden Wichte mit ihren Hüpfbegegnungen so wie ursprünglich vom Erdgeschoss aus weiter, so dass eine nächste Party-Höhe nach einer weiteren Höhenveränderung um 6 erwartet werden kann usw. Die Überlegungen können weitergeführt werden, indem z.B. versucht wird, weitere Wichte aus anderen Treppenhäusern an einer Party zu beteiligen, und Ausschau nach dafür geeigneten Etagen gehalten wird.