Mathematikdidaktik im Wissenschaftsgefüge: Zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens

Festschrift für Elmar Cohors-Fresenborg
Band 2

Christa Kaune, Inge Schwank, Johann Sjuts (Hg.)

Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematikdidaktik Nr. 40.2
Osnabrück 2005

Kaune, Christa / Schwank, Inge / Sjuts, Johann
Mathematikdidaktik im Wissenschaftsgefüge:
Zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens
Festschrift für Elmar Cohors-Fresenborg
Band 2
1. Auflage,
Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e. V., 2005
(Schriftenreihe des Forschungsinstituts für Mathematikdidaktik; Heft 40.2)
ISBN 3-925386-49-1

Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e. V.
Postfach 18 47
D-49008 Osnabrück

VORWORT

Am 19. Mai 2005 begeht Elmar Cohors-Fresenborg seinen 60. Geburtstag. Zugleich ist er seit etwas mehr als 30 Jahren (genau: seit dem 1. April 1975) ordentlicher Professor für Mathematikdidaktik an der Universität Osnabrück.

Nach der Amtszeit als 2. Vorsitzender in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik von 1994 bis 2000 und der Vizepräsidentschaft in der European Society for Research in Mathematics Education von 2001 bis 2005, deren Mitbegründer er war, hat er seit der diesjährigen Jahrestagung das Amt des 1. Vorsitzenden der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik inne.

All dies ist Anlass, seine Leistungen mit einer Festschrift zu würdigen.

Elmar Cohors-Fresenborg wuchs in Düsseldorf auf und besuchte dort die Schule bis zum Abitur. Anschließend studierte er von 1964 bis 1972 in Münster und zwischenzeitlich in Freiburg (Schweiz) Mathematik, Mathematische Logik, Physik und Volkswirtschaftslehre. Die Münsteraner Zeit bildet den Ursprung für zwei Charakteristika, die mit den Namen Dieter Rödding und Heinrich Behnke verbunden sind.

Das eine Kennzeichen der wissenschaftlichen Tätigkeit Elmar Cohors-Fresenborgs ist die Grundlagenforschung. Sie begann im Arbeitsgebiet der Mathematischen Logik bei Dieter Rödding. Aus der Grundlagenforschung entwickelte Elmar Cohors-Fresenborg die kognitionstheoretisch akzentuierte Mathematikdidaktik. Wie an keiner anderen Universität im deutschsprachigen Raum steht für die an der Universität Osnabrück in Forschung und Lehre betriebene Mathematikdidaktik die Erforschung des mathematischen Denkens, mithin die Beschäftigung mit kognitiven Prozessen beim Verstehen von Mathematik, im Mittelpunkt. Folgerichtig kam es auch zur Gründung des Instituts für Kognitive Mathematik, dessen Direktor Elmar Cohors-Fresenborg ist.

Das andere Kennzeichen der Tätigkeit in Forschung und Lehre entspringt dem Einfluss von Heinrich Behnke, der die Zusammenarbeit von Universität und Schule in beispielgebender Weise förderte. So gibt es auch an der Universität Osnabrück seit 1981 eine alljährliche Mentorentagung, die Angehörige von Universität und Schule zusammenführt. Zu nennen ist in dem Zusammenhang aber vor allem das aus dieser Kooperation entstandene "Osnabrücker Curriculum" mit entsprechenden Schülertext- und Lehrerhandbüchern für die Schuljahrgänge 7 bis 11. In ganz besonderer Weise wird hier die kognitionstheoretische Ausrichtung des Mathematikunterrichts deutlich.

Kognitionstheoretische Forschung verbindet Mathematik und mathematisches Denken; sie ist folglich ein prägendes Kennzeichen der Kognitiven Mathematikdidaktik (Cognitive Mathematics Education - CME). Wohl kaum einer hat dies -

national wie international - so eindringlich und nachdrücklich vertreten wie Elmar Cohors-Fresenborg. Davon zeugen zahlreiche Publikationen, vor allem aber seine vielen Vorträge und Diskussionsbeiträge. Seine brillanten und nicht selten unbequemen Dispute - schon in jungen Jahren mit Hans Freudenthal und Hans-Georg Steiner - belegen dies ebenso wie seine neuesten Analysen der PISA-Ergebnisse.

Die an Denkvorgängen interessierte Mathematikdidaktik bedarf der Methoden aus empirischer Lern- und Unterrichtsforschung sowie der Psychologie, deren je eigene Tradition Ursula Viet und Hans Joachim Strüber an der Universität Osnabrück begründeten. Ursula Viet war es auch, die Elmar Cohors-Fresenborg für ihre Universität zu gewinnen verstand.

Mathematikdidaktik befindet sich - inhaltlich wie methodisch - in einem Wissenschaftsgefüge. Zu diesem Gefüge gehören vornehmlich Mathematik, Logik, Philosophie, Neurowissenschaften, Psychologie und Pädagogik. Der vorliegende Band möchte dies mit Beiträgen zum Verstehen und Unterrichten mathematischen Denkens zum Ausdruck bringen.

Von denjenigen, die sich an dem Band beteiligt haben, sei Herbert Kütting namentlich erwähnt. Bei ihm in Münster hatte Elmar Cohors-Fresenborg seine erste und einzige Assistentenstelle, bevor er über Flensburg, wo er Professor wurde, nach Osnabrück kam.

Die Autorinnen und Autoren widmen ihre Beiträge Elmar Cohors-Fresenborg mit Dank und Glückwunsch. Weiterhin alles Gute!

Osnabrück, im Mai 2005

Christa Kaune, Inge Schwank, Johann Sjuts

MASCHINENINTELLIGENZ: EIN ERGEBNIS DER MATHEMATISIERUNG VON VORGÄNGEN

ZUR IDEE UND GESCHICHTE DER DYNAMISCHEN LABYRINTHE

INGE SCHWANK

Kurzfassung: Van der Waerden (1954) stellte in Abgrenzung zum sprachlichen und visuellen Denken die zentrale Bedeutung des motorischen Denkens – oder wie wir heute sagen, des funktionalen Denkens – beim kreativen Mathematisieren heraus. Das von Elmar Cohors-Fresenborg entwickelte Lernmaterial DYNAMISCHE LABYRINTHE bietet vielfältige Gelegenheiten, sich in dieser Art des Denkens zu üben und adäquate mathematische Vorstellungen aufzubauen. Die während der Konstruktion von DYNAMISCHEN LABYRINTHEN fortwährend materialisierten Denkresultate erlauben in besonderer Weise Einblicke in eine Befähigung zum funktionalen Denken.

Abstract: Van der Waerden (1954) especially emphasizes, separate from more verbal and visual thinking, the crucial significance of motor thinking processes, today known as functional thinking, in creative mathematization. The DYNAMIC MAZES, a learning tool developed by Elmar Cohors-Fresenborg, offers a variety of possibilities to practice this type of thinking and to develop adequate mathematical concepts. The continually materialized results of the thinking processes exercised during the construction of DYNAMIC MAZES allows particular insights into competent functional thinking.

1. Hintergrund

Der Flaschenautomat um die Ecke kann es, der Mensch muss es erst mühsam erlernen: einen bestimmten Zahlenbereich zu überblicken, in ihm beispielsweise zu addieren oder zu subtrahieren. Möchte man das Geheimnis verstehen, was den Automaten zu dieser mathematischen Leistung befähigt, kann man einer Entwicklung folgen, die Anfang des 20. Jahrhunderts durch gezielte Fragen zur Lage der Mathematik von Hilbert eingeleitet worden ist. Neben der Untersuchung der Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit der Mathematik interessierte ihn auch, ob die Mathematik *entscheidbar* sei, also ob ein (mechanisches) *Verfahren* existiere, das – angewendet auf eine beliebige mathematische Behauptung – zu einer richtigen Entscheidung

hinsichtlich der *Wahrheit* dieser Behauptung führt. 1928 waren die Antworten offen, doch nach Hilberts Ansicht sollten zukünftige Analysen eher zu einem positiven Bescheid führen. 1931 konnte Gödel jedoch zeigen, dass die Mathematik weder vollständig noch widerspruchsfrei ist, und die Mathematik geriet in eine schwere Grundlagenkrise. Das entscheidende Problem bei der Suche nach einer Antwort auf die Frage nach dem Entscheidungsverfahren war, die der menschlichen Vorstellung intuitiv gegebene Idee "mechanisches Verfahren" zunächst einmal zu mathematisieren.

Menschliche Rechner – menschliche Denker

Turing gelang 1936 eine solche Mathematisierung mit einer Schöpfung, die als Turing-Maschine bekannt geworden ist. Sie war der Schlüssel für den Beweis, dass auch Hilberts dritte Frage verneint werden muss: das gewünschte grandiose Wahrheitsfeststellungsverfahren kann es nicht geben. Zugleich hatte er mit seiner Maschine den ersten idealen Computer konstruiert. Bemerkenswerterweise berichtet er darüber, dass er sich bei seiner Mathematisierung davon hat leiten lassen, wie ein *»computer«* rechnet – *computer* in der damaligen Wortbedeutung im Englischen, nämlich ein *Mensch, der eine Berechnung ausführt*. Neben Turings Vorschlag wurden noch andere Mathematisierungen für solche Verfahren erdacht. Die spannende Frage war dabei immer, ob diese universell sind, Alleskönner in dem Sinn, dass jedes Problem, das überhaupt berechenbar ist, im Prinzip durch ihren Einsatz berechnet werden kann. Nicht zuletzt zwecks Eleganz sollten diese Mathematisierungen aus möglichst wenigen Grundbausteinen und Regeln ihrer Verwendung bestehen.

Die Mathematisierung von Vorgängen war in den 70er Jahren eine Leitidee der konzeptionellen Arbeit von Dieter Rödding, Leiter des Instituts für Mathematische Logik und Grundlagenforschung der Universität Münster, und seinen Schülern, darunter Elmar Cohors-Fresenborg. Die Forschergruppe suchte nach einer Präzisierung der Idee, die Handlungskomplexität eines endlichen Automaten in ein Netzwerk von einfachen Automatenbausteinen zu zerlegen, um so zentrale Mechanismen aufdecken zu können. Dies führte u.a. zu berechnungsuniversellen Konstruktionen, die später als *Rödding*-Netze in die Literatur eingegangen sind (vgl. Kapitel 14.6 in Erk & Priese, 2000; s. auch Kapitel 23 in Cohors-Fresenborg, 1977). Elmar Cohors-Fresenborg hatte die Idee zur Vergegenständlichung dieser Konstruktionen und schuf so das Lernmaterial DYNAMISCHE LABYRINTHE.

Die Funktionsweise dieser DYNAMISCHEN LABYRINTHE erläutern wir im ersten Teil dieses Beitrags anhand konkreter Aufgaben. Im zweiten Teil legen wir – ausgehend von ihrer Entwicklungsgeschichte – ihre mathematikdidaktische Bedeutung sowohl hinsichtlich der Unterrichtspraxis als auch der Grundlagenforschung dar.

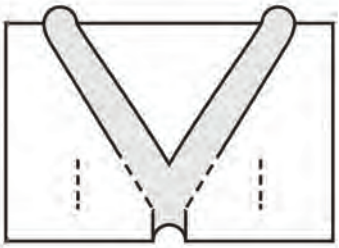
2. DYNAMISCHE LABYRINTHE: Mathematisieren mit Bausteinen

Aufgrund der wenigen Grundbausteine aber der gleichzeitig gegebenen Berechnungsuniversalität lassen sich mit den DYNAMISCHEN LABYRINTHEN Probleme unterschiedlichsten Schwierigkeitsgrades bearbeiten. Der Einsatzbereich reicht von der Grundschule über die Oberstufe bis hin z.B. zu Veranstaltungen zur Theoretischen Informatik an der Universität. In diesem Beitrag stellen wir Einstiegsaufgaben vor.

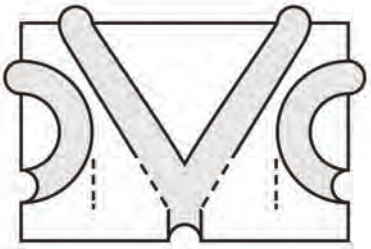
Der Baukasten DYNAMISCHE LABYRINTHE (Abb.1). enthält verschiedene Bausteine – Wegbausteine (Geraden, Kurven, Kreuzungen, Einmündungen) und Schalter (Zähler, Weichen, Flip-Flops) – die zur Konstruktion von Automatenschaltungen auf ein Lochbrett gesteckt werden. Die Funktionsweise einer gebauten Schaltung wird getestet, indem sie mit einem Holzstäbchen abgefahren wird. Allgemein gilt die Fahrregel: *"Immer der Nase nach!"*, bei dem Kreuzungsbaustein ist zur Einhaltung der Determiniertheit zusätzlich festgelegt, dass er nur geradeaus durchfahren werden darf. Der bedeutsamste Typ Wegbaustein ist die Einmündung. Ermöglichen die anderen Wegbausteine lediglich die schlichte Fortsetzung des einmal eingeschlagenen Weges, können mit der Einmündung zwei Wege zusammen geführt und dadurch etwa eine Wiederholung eingeleitet werden (s. auch Abb.4).

Abb. 1: Der Baukasten
DYNAMISCHE LABYRINTHE mit Steckbrett

Schalter



Flip-Flop: Automatische Umstellung



Weiche: Umstellung auf Anforderung

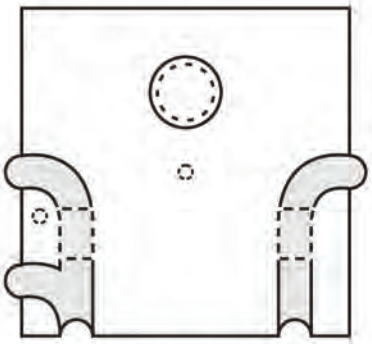
Du kannst dir selbst funktionsfähige Papiermodelle der Schalter basteln. Schneide dazu in den Modellbausteinen Schlitze entlang der 4 gestrichelten Linien. Schneide die Schieber aus und stecke sie so durch die Schlitze, dass die Bahnen der Schieber über den Bahnen der Modellbausteine liegen. Beachte, dass der Flip-Flop und die Weiche unterschiedlich funktionieren und sie unterschiedliche Schieber haben.

Flip-Flop-Schieber

Weichen-Schieber

Abb. 2: Arbeitsblatt "Schalter: Flip-Flop, Weiche"

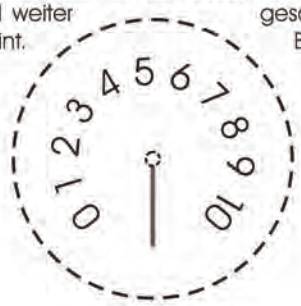
Schalter mit Zahlendrehscheibe



Zähler

Du kannst dir selbst ein funktionsfähiges Papiermodell des Zählers basteln. Schneide dazu in dem Modellbaustein die umstrichelten Flächen frei. Dadurch erhälst du ein Sichtfenster für die aktuell eingestellte Zahl. Weiter erhälst du auf der Bahn zum Vorwärtszählen und der Bahn zum Rückwärtszählen freie Felder, damit du die Zahlendrehscheibe weiter drehen kannst. Schließlich erhälst du noch zwei kleine Löcher. Schneide den Hebel aus und schneide das markierte, kleine weisse Loch frei. Lege den ausgeschnittenen Hebel so auf den Papierzähler, das du ihn an dem kleinen seitlichen Loch mit einem Druckknopf befestigen kannst. Schneide die Drehscheibe aus und schneide auch in ihr das markierte kleine Loch frei. Lege die ausgeschnittene Drehscheibe so hinter den Zähler, dass du sie in der Mitte des Zählers mit einem Druckknopf befestigen kannst. Probiere Deinen Zähler aus! Denke daran, dass beim Befahren des Vorwärtszählweges die Drehscheibe soviel weiter geschoben wird, dass die nächst höhere Zahl im Sichtfenster erscheint. Beim Befahren des Rückwärtszählweges wird die Drehscheibe um soviel weiter gedreht, dass die nächst kleinere Zahl erscheint. Wie muss sich die Stellung des Hebels beim Vorwärtszählen von 0 auf 1 bzw. beim Rückwärtszählen von 1 auf 0 ändern?

Hebel
für den Nulltest



Zahlendrehscheibe

Besorge dir zwei kleine Druckknöpfe.

Abb. 3: Arbeitsblatt "Schalter mit Zahlendrehscheibe (Zähler)"

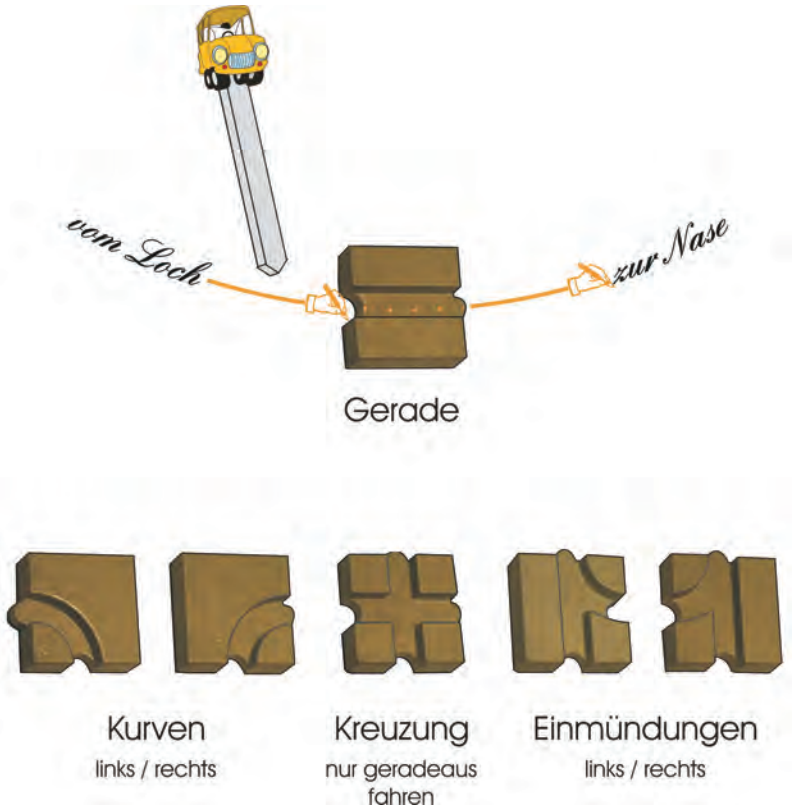


Abb. 4: Wegbausteine

Die mächtigsten Bausteine im Baukasten sind die drei verschiedenen Schalter. Durch ihre geeignete Verwendung ist es möglich, den Verarbeitungsfluss je nach Bedarf automatisch umlenken zu lassen, z.B. um die korrekte Abrechnung zu bewerkstelligen, dass für genau zwei Euro eine Ware ausgegeben wird. Einen Schalter angemessen zu verstehen, ist nicht einfach und erfordert gute unterrichtliche Begleitung. Es empfiehlt sich, für diese Schalter bewegliche Tafelmodelle aus Pappe anzufertigen. Arbeitsblätter mit Bastelanleitungen für Papiermodelle sind erstellt worden, so dass auch ohne vorliegenden Baukasten über Schaltungen nachgedacht werden kann (Abb.2: *Schalter,* Abb.3: *Schalter mit Zahlendrehscheibe*).

Insbesondere Menschen, die Schwierigkeiten mit funktionalen Vorstellungen haben, ist der Zugang zum Verständnis der Funktionsweise von Schaltungen erschwert (s. z.B. Schwank 2003, Schwank et al. 2003).

2.1 Start- und Ziel-Orte verbinden

Bei jüngeren Schülern[1] ist es ratsam, die Baukästen zunächst ohne die Schalter-Bausteine zu benutzen und nur den korrekten Umgang der für die Verbindung der Schalter zur Verfügung stehenden Wegbausteine (Abb.4) zu erarbeiten.

Dazu werden sogenannte Start-/Ziel- bzw. Eingang-/Ausgangprobleme gestellt. Mit farbigen Aufklebern werden jeweils zwei bis drei Geraden z.B. als gelbe, blaue oder grüne Geraden markiert und eine geschickte Verteilung dieser Geraden an den Rändern des Steckbrettes seitens des Lehrers vorgegeben. Entsprechend der Fahrregel fungieren Geraden, die mit ihrer Nase ins Brett schauen, als Eingänge, Geraden, die mit ihrer Nase aus dem Brett herausschauen als Ausgänge. Die Aufgabe besteht darin, Geraden gleicher Farbe miteinander zu verbinden, oder anders ausgedrückt, dafür zu sorgen, dass nach Befahren eines Eingangs der zu ihm farblich passende Ausgang erreicht wird. Bereits bei diesen einfachen Aufgaben ist auffällig, dass Menschen, Schüler wie Lehrer, sich mehr oder weniger leicht darauf einlassen, in einem Problem ein Organisationsproblem zu sehen, statt etwa vorrangig sich von der Ästhetik eines Muster leiten zu lassen.

2.2 Maschinen-Schaltungen

Bereitet der Umgang mit den Wegbausteinen keine Probleme, kann die Konstruktion einer ersten Schaltung in Angriff genommen werden, mit der ein aufwändigeres Problem mathematisiert werden soll. Gesucht ist eine Automatenschaltung, mit der eine periodische Folge *ababab* … sortiert werden kann. Attraktiv ist, den Schülern diese Folge in Form von dunklen und hellen Mini-Schokoküssen zu zeigen:

> "Ihr sollt eine Schaltung für eine Maschine bauen, die etwas besonderes kann. Die Maschine hat genau einen Eingang. An diesem Eingang kommen – so wie ihr hier seht – abwechselnd dunkle und helle Schokoküsse an. Die Maschine hat zwei Ausgänge, an dem einen sollen alle dunklen rauskommen, an dem anderen alle hellen, also farblich schön sortiert."

Jeder Schüler erhält eine mit "E" markierte Gerade als Eingang und zwei passend farbig beklebte Geraden für die Ausgänge. Es kann nützlich sein, zunächst jeden Schüler einen Flip-Flop auf sein Brett stecken zu lassen, um die Aufgabenstellung besser verständlich zu machen (Abb.5).

> "Mit diesem Baustein ist es ganz einfach. Probiert mal aus, was passiert, wenn ihr ihn abwechselnd mit dunklen und hellen Schokoküssen befahrt."

1. Die Begriffe "Schüler" und "Lehrer" sollen stets geschlechtsneutral verstanden werden und jeweils die maskuline und feminine Form umfassen.

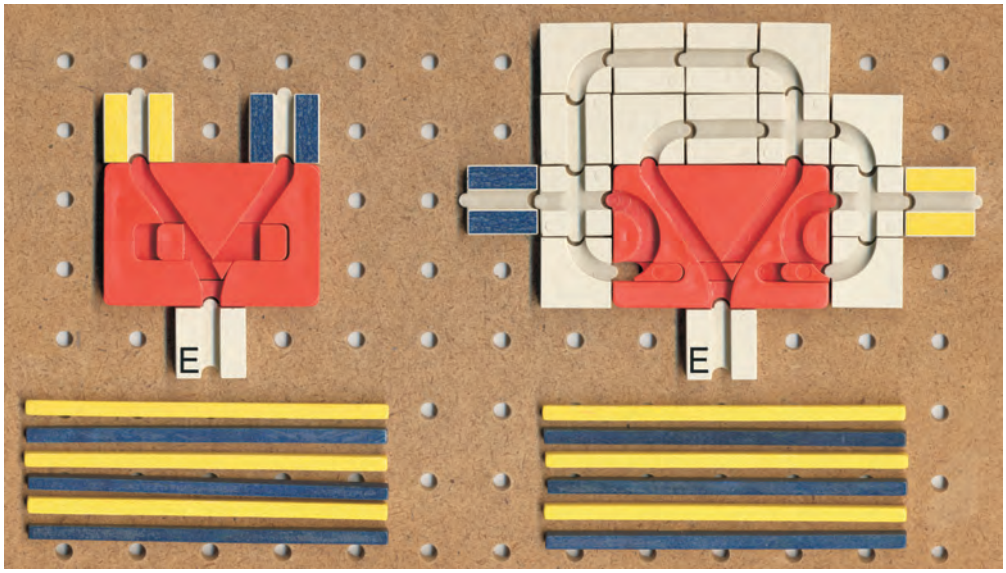


Abb. 5: 2er-Sortierer mit Flip-Flop (links) bzw. mit Weiche (rechts)

Gibt man den Schülern zum Testen stellvertretend für die Schokoküsse farbige Stäbchen, die sie in der vorgegebenen Ordnung vor den Eingang ihrer Schaltung legen, ist es für sie leichter, die Reihenfolge beim Befahren einzuhalten. Erstaunt stellt die Klasse fest, dass mit dem Flip-Flop das gestellte Problem unmittelbar gelöst ist (ggfs. an der Tafel mit Tafelmodell vorführen lassen) und die Lehrkraft fährt fort:

> "Jetzt wird es schwieriger! Legt den Baustein zur Seite. Löst dasselbe Problem, die Schokoküsse zu sortieren, mit diesem Baustein hier."

Jeder Schüler erhält eine Weiche. Statt die Schüler ganz alleine tüfteln zu lassen, kann mit ihnen zunächst anhand eines Tafelmodells besprochen werden, welche Möglichkeiten die Weiche insgesamt zum Befahren bietet und was dabei unterwegs passiert. Während der Flip-Flop bei jeder Durchfahrt automatisch umgestellt wird, muss das Umstellen bei der Weiche durch geeignetes Befahren einer der beiden halbmondförmigen Wege besorgt werden (Abb.5). Ideen zu meistern derart "*jetzt* muss ich das Stäbchen in dem Baustein etwas regeln lassen, was *später* für das Funktionieren gebraucht wird", fällt nicht allen Schülern leicht (vgl. Schwank 1996, 2003).

2.3 Vielfältiges Sortieren

Die Idee des 2er-Sortierers mit Weiche soll zunächst zu einem 3er-Sortierer mit Weichen und dann weiter zu Sortierern beliebiger Periodenlänge *n* verallgemeinert werden. Im Falle des 3er-Sortierers (Abb. 6) ist eine periodische Folge *abcabc* … zu sortieren (z.B. dunkel-, hell-, mittelbraune Schokoküsse). Die erste Weiche sortiert *a* aus und lässt *bc* passieren. Dies ist ein Fall für den Einsatz des bereits bekannten 2er-Sortierers. Diese Idee lässt sich zu einem induktiven Verfahren für den Bau von *n*-Sortierern erweitern. Bereits Grundschüler sind in der Lage, dieses selbst zu entdecken – spätestens nach Konstruktion und Diskussion zweier weiterer Maschinen: 4er- und 5er-Sortierer.

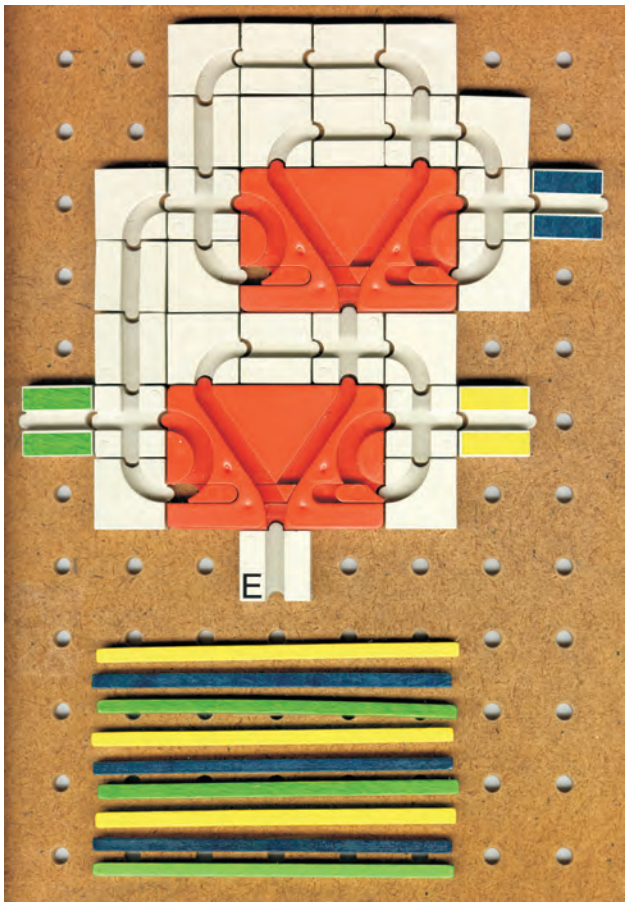


Abb. 6: 3er-Sortierer mit Weichen

Mit dem Arbeitsblatt "*Ordnung in Bewegung*" (Abb.7) gerät der Aufbau der Zahlen in den Blick. Die Schüler erkunden anhand ihres 3er-Sortiers Ideen aus der Teilbarkeitslehre: in der natürlichen Reihenfolge der Zahlen werden die Zahlen je nach Rest an den verschiedenen Ausgängen aussortiert. Interessante und aufgrund von Teilbarkeitsverhältnissen erklärbare Muster ergeben sich an den Ausgängen in Abhängigkeit davon, welche Periodenlänge *p* die Reihe hat, die durch einen bestimmten *n*-Sortierer verarbeitet wird; kgV, ggT und Primzahlen sind besondere Ereignisfälle, die es in ihrer Besonderheit zu entdecken und zu diskutieren gilt.

Ein mit den Sortieraufgaben verwandter Aufgabentyp ist die Konstruktion von Schaltungen für Verkaufsautomaten, womit dann auch die mathematische Intelligenz des eingangs erwähnten Flaschenautomaten verstehbar wird. Die Warenausgabe

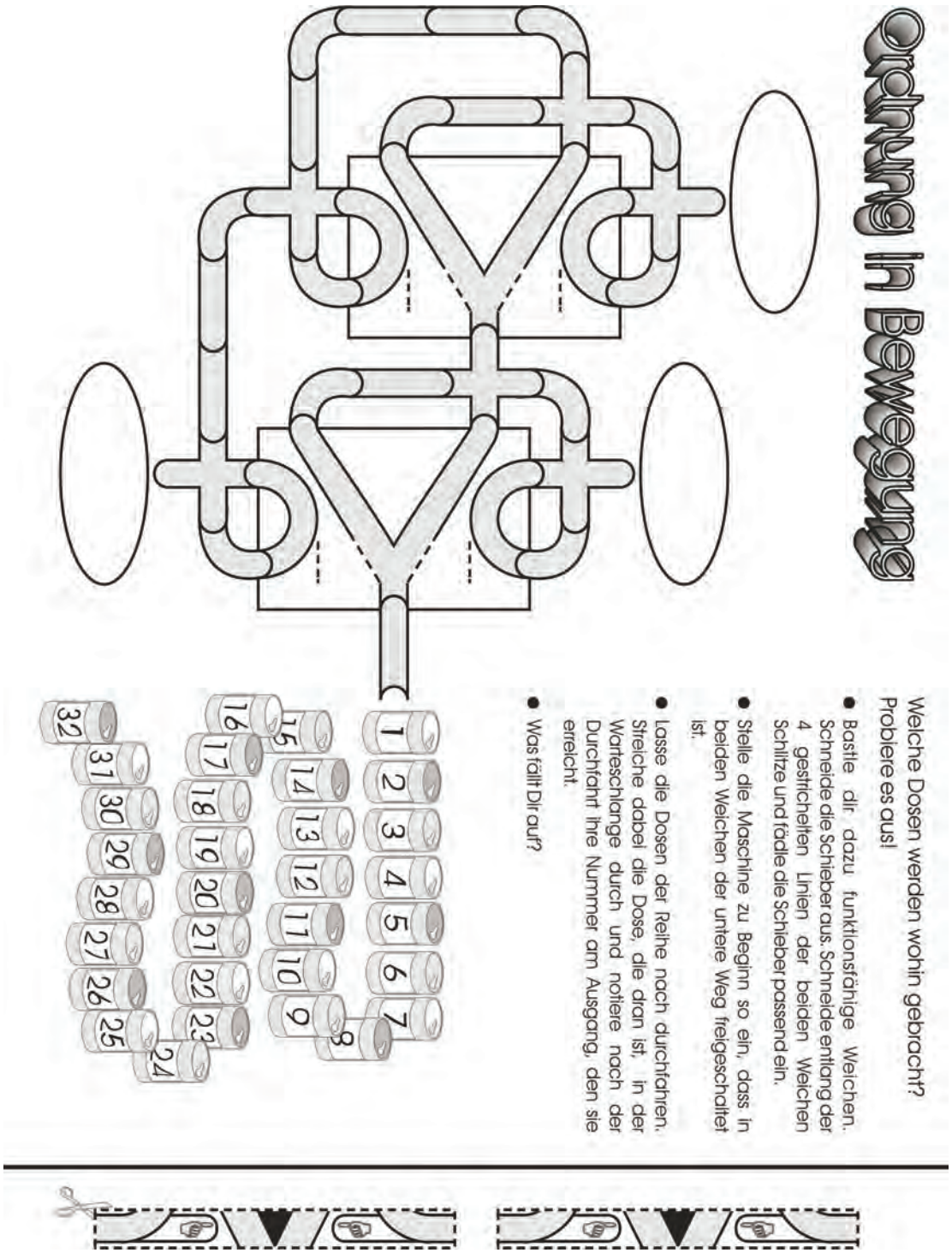


Abb. 7: Arbeitsblatt "Ordnung in Bewegung"

aufgrund einer bestimmten Anzahl von Münzen ist ein Fall von Sortieren: In der Folge der eingeworfenen Münzen muss diejenige Münze aussortiert werden, auf die die Warenausgabe erfolgen soll, während alle anderen zum Einwurf weiterer Münzen auffordern. Es beginnt wieder ganz einfach:

> "Entwickelt eine Schaltung für einen Verkaufsautomaten, der auf den Einwurf von 10 Cent-Münzen reagiert. Für genau zwei 10 Cent-Münzen soll es einen Kaugummi geben."

Die Schüler stellen fest, dass sie mit ihrem 2er-Sortierer dieses Problem bereits gelöst haben: periodisch zählen zu können, ist eine Organisationsfrage. Die erste 10 Cent-Münze erreicht den einen Ausgang, der nun die Bedeutung hat "weitere 10 Cent-Münze muss eingeworfen werden", die zweite 10 Cent-Münze erreicht den anderen Ausgang, der nun die Bedeutung hat "Warenausgabe veranlassen" und so fort. Der Schritt zu Verkaufsautomaten, die mehr 10 Cent-Münzen anfordern, liegt auf der Hand. Man baut den Sortierer entsprechender Periodenlänge (Anzahl der erforderlichen 10 Cent-Münzen), lässt den Ausgang, der von der letzten 10 Cent-Münze in der Periode erreicht wird, isoliert ("Warenausgabe veranlassen") und verbindet alle anderen Ausgänge zu einem einzigen ("mehr Geld fordern"). Verkaufsautomaten können statt mit Weichen auch mit Flip-Flops gebaut werden (Abb.8). In der mathematischen Knobelecke können schließlich Maschinen zum Sortieren der unterschiedlichsten periodischen Muster behandelt werden wie z.B. *abacabac* … oder *abbacabbac* … . Eine neue Idee erfordert eine Maschine, die den Einwurf unterschiedlicher Münzen gestattet (z.B. 1 €- und 2 €-Münzen; hierfür werden zwei Eingänge benötigt) und die unterschiedlichen Münzwerte bei der Ausgabe einer Ware (z.B. für 3 €) richtig verwaltet. Nicht alle Schaltungen, die mit Weichen konstruierbar sind, können auch mit Flip-Flops gebaut werden, wohl aber umgekehrt.

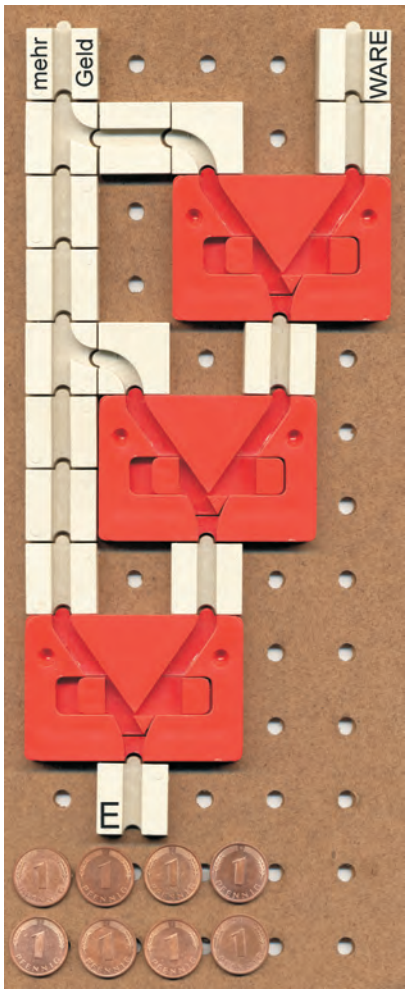


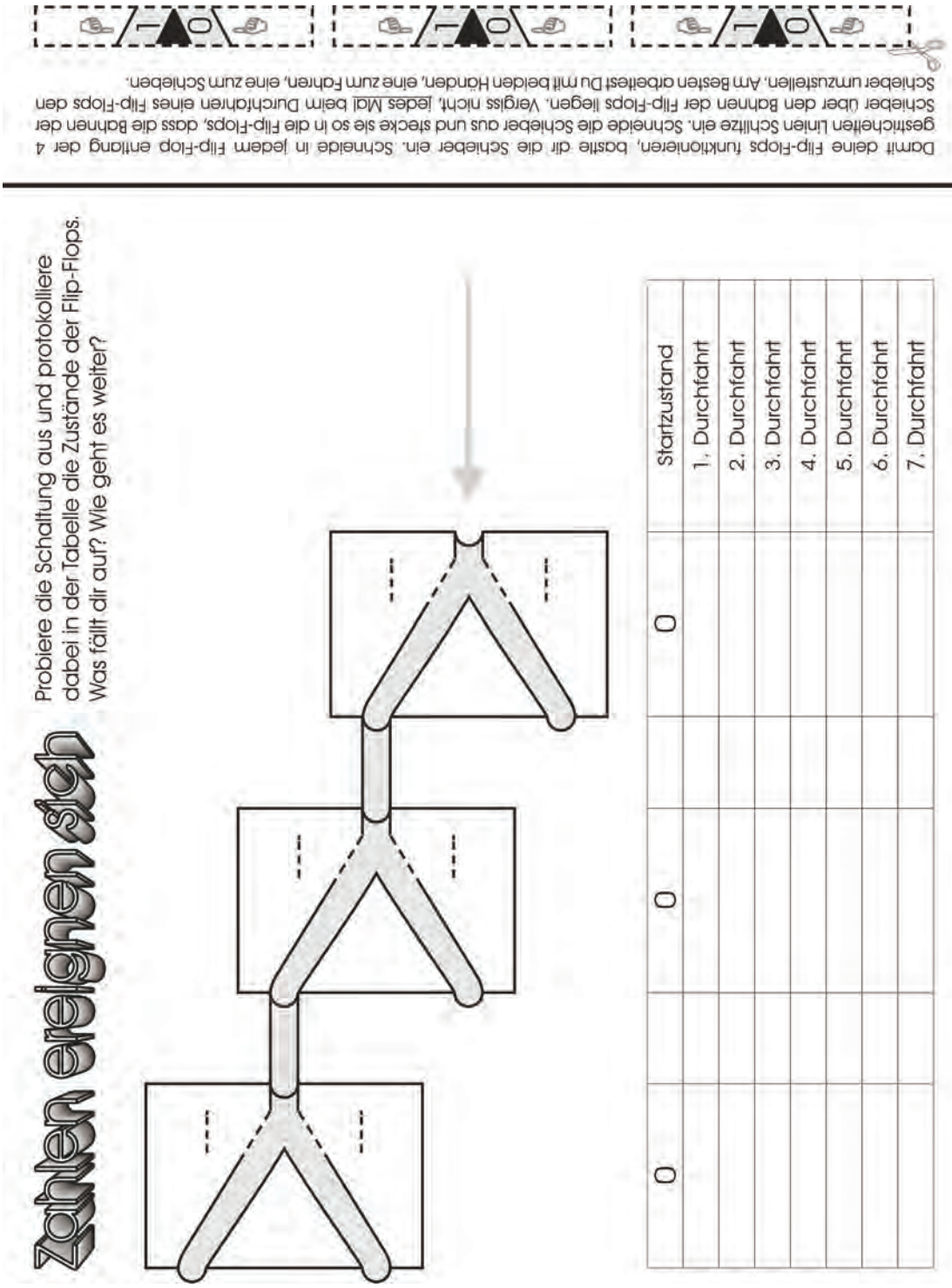
Abb. 8: Flip-Flop-Verkaufsautomat für 8 Münzen

2.4 Mathematisierung von Anzahlen

Die Bezeichnungen der unüberschaubar großen und ungemein vielfältigen Anzahlen stellte für die Menschheit eine große Herausforderung dar. Eng mit den Bezeichnungen verwoben waren die Mühen und Qualen beim rechnerischen Umgang mit diesen Anzahlen. Den entscheidenden Durchbruch brachte die Erfindung der Darstellung von Anzahlen mit Hilfe eines Stellenwertsystems (vgl. Schwank 2005). Was ist das Besondere an dieser Art Bezeichnungssystem für Anzahlen?

Einmal kann man das Besondere darin sehen, dass es ein einfaches, universelles Ordnungssystem ist, um Zahlen beliebiger Größe nach einem einheitlichen Muster darzustellen. Zum anderen kann man das Besondere darin sehen, dass mit dieser Art der Zahldarstellung Momentaufnahmen in einem – nach einem durchgängigen Prinzip ablaufenden – schlichten Abzähl-Prozess möglich sind. Im weiteren Unterricht wird letzterer Aspekt aufgegriffen und das Funktionieren eines Stellenwertsystems als dynamisches Bezeichnungssystem anhand der Dualzahldarstellung mit Flip-Flops erarbeitet (Abb.9: Arbeitsblatt "*Zahlen ereignen sich*").

Aufgabe für die Schüler ist, die Zustände der Flip-Flops nach jeder Durchfahrt zu protokollieren. Die Symbolik für die Flip-Flop-Zustände kann frei gewählt werden, z.B. o(ben)/u(nten), r(echts)/l(inks) oder wie auf dem Arbeitsblatt vorgegeben mit 0/1. Es ist eine aufregende Entdeckung, dass ein Zustandsprotokoll, also herausgegriffene Momentaufnahmen des Prozesses, gerade die Repräsentation der Zahlen von Null bis Sieben in Dualzahlschreibweise ergibt. Mit einer weiteren Stelle, also einem weiteren Flip-Flop, käme man bis Fünfzehn, der letzte Ausgang wird bei der sechzehnten Durchfahrt erreicht. Jedes Stellenwertsystem funktioniert analog zu dieser Flip-Flop-Maschine: In jeder Stelle wird – beginnend in der Ausgangssituation Null – entlang des vorgegebenen Ziffernvorrates um Eins weiter geschaltet. Ist man am Ende angekommen, wird diese Stelle auf ihren Ausgangszustand Null zurückgesetzt, man gelangt zur nächst höheren Stelle und schaltet dort einen weiter. Die gerade geschaltete Stelle wird erst wieder erreicht, wenn die ihr unmittelbar vorangehende Stelle durchgeschaltet worden ist, diese braucht das Durchschalten der vor ihr liegenden Stelle usw. bis hin zur Einerstelle. Was beim Umgang mit der symbolischen Zahldarstellung leicht in den Hintergrund gerät, wird beim Arbeiten mit der Maschine offensichtlich: der Aufwand, in einer Stelle um eins weiterzuschalten, dort "Eins" dazuzurechnen, steigt dramatisch, je weiter weg von der Einerstelle diese Stelle angesiedelt ist. Eine schlichte Null "anzuhängen", bedeutet, den Flip-Flop-Baum um einen Flip-Flop auszubauen.



Zahlen ereignen sich

Probiere die Schaltung aus und protokolliere dabei in der Tabelle die Zustände der Flip-Flops. Was fällt dir auf? Wie geht es weiter?

	0		0		0		
Startzustand							
1. Durchfahrt							
2. Durchfahrt							
3. Durchfahrt							
4. Durchfahrt							
5. Durchfahrt							
6. Durchfahrt							
7. Durchfahrt							

Damit deine Flip-Flops funktionieren, bastle dir die Schieber ein. Schneide in jedem Flip-Flop entlang der 4 gestrichelten Linien Schlitze ein. Schneide die Schieber aus und stecke sie so in die Flip-Flops, dass die Bahnen der Schieber über den Bahnen der Flip-Flops liegen. Vergiss nicht, jedes Mal beim Durchfahren eines Flip-Flops den Schieber umzustellen. Am Besten arbeitest Du mit beiden Händen, eine zum Fahren, eine zum Schieben.

Abb. 9: Arbeitsblatt "Zahlen ereignen sich"

Weiterführung

Mit interessierten Schülern kann man diese Einsicht ins Stellenwertsystem nutzen und eine Maschine bauen, die auf der Basis Vier zählt. Dazu benutzt man für jede Stelle als Teilmaschine eine 4er-Sortiermaschine aus Flip-Flops.

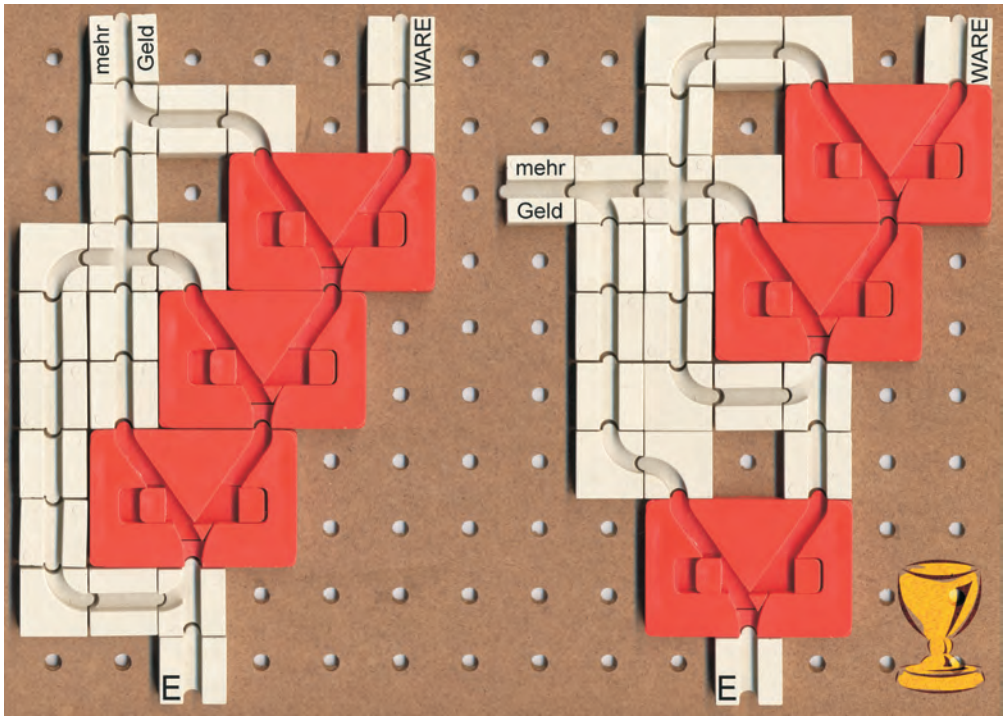


Abb. 10: Ans Ziel zur Sechs mit Zehn Flip-Flopschaltungen oder mit Zwölf

Die Mathematisierungen beim Problem "Bauen von Verkaufsmaschinen mit Flip-Flops" wird durch das Stellendenken in neue Bahnen gelenkt. Im Falle eines Warenwertes von 2^n Münzen nimmt man einfach n Flip-Flops in einfacher Hintereinanderschaltung, im Falle von $2^n - a$ Münzen muss man sich überlegen, wie man den Zustand für 2^n durch geeignete Rückkopplungen um a Schritte schneller erreichen kann. Dabei kann man sich durch geschicktes Weiterschalten in höheren Stellen ersparen, die davor liegenden Durchschaltungen erst alle wieder durchnudeln zu müssen. Als Qualitätsmaß für die konstruierten Maschinen nehme man die Anzahl der benötigten Flip-Flopschaltungen zum Erreichen der letzten Münzdurchfahrt und veranstalte Schüler-Wettbewerbe. (Abb.10)

2.5 Mechanisch-algorithmische Verarbeitung von Zahlen

Mit der dritten Schalterart, dem sogenannten Zähler, wird ein dynamischer Speicherplatz für Zahlen angeboten. Damit können Maschinen konstruiert werden, die *abhängig* von Anfangswerten Endergebnisse produzieren. Es ist eine besondere Form der Mathematisierung der mathematischen Idee Funktion, wobei die Aspekte Variable und funktionale Abhängigkeit sowie Argumente und Werte einer Funktion einer speziellen Betrachtung unterzogen werden. Die Funktionsweise einer geeigneten Maschine, die sich aus der Verschaltung ihrer Bauteile ergibt, entspricht der Wirkungsweise der Funktion. Diejenigen Speicherplätze, die anfangs mit Eingabewerten belegt werden, stehen für die Variablen, auf die die Funktion zugreift. Der Funktionswert ist in der Maschine in einem bestimmten, vereinbarten Speicherplatz ablesbar, und zwar nachdem der Ausgang der Maschine erreicht worden ist. Eine Maschine zu konstruieren, verlangt, die funktionale Gesetzmäßigkeit in Form eines Verfahrens auszudrücken. Die Maschine auszuprobieren bedeutet, die Funktion zu er-*fahren*. Als Einstiegsaufgabe bietet sich die Konstruktion einer Maschine zur Addition zweier natürlicher Zahlen an (Abb.11), die dann zu einer Subtraktionsmaschine (Abb.12) umgebaut werden kann. Da jede berechenbare Funktion im Prinzip mit den DYNAMISCHEN LABYRINTHEN darstellbar ist, sind der Komplexität der Aufgabenstellungen kaum Grenzen gesetzt.

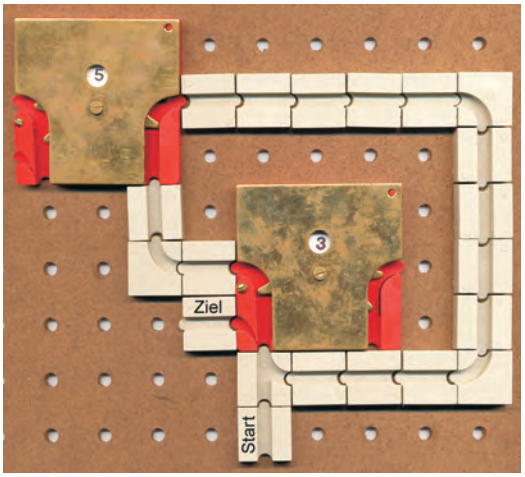


Abb. 11: Additionsmaschine

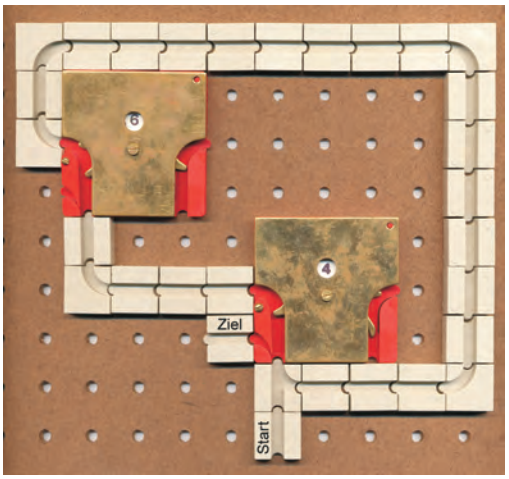


Abb. 12: Subtraktionsmaschine

Sind zur Lösung eines Problems unterschiedliche Maschinen konstruiert worden, können sie in eine Rangordnung gebracht werden, die darauf beruht, mit vielen Rechenschritten (vorwärts-, rückwärtszählen in den Zählern) das Ergebnis jeweils berechnet wird. Ideen für unterschiedliche Konstruktionsweisen und damit auch Optimierungen können sich aufgrund von Termumformungen ergeben. Gegeben sei z.B. $f(x_1, x_2) = 2(x_1+x_2)$. Hier fallen zunächst die Rechenschritte an, um die Summe von x_1 und x_2 zu bilden (ist mit einem Aufwand von $2x_1$ möglich), anschließend muss diese Summe noch verdoppelt werden (ist mit einem Aufwand von $3(x_1+x_2)$ möglich; insgesamt fallen also $5x_1+3x_2$ Rechenschritte an). Baut man dagegen eine Maschine nach der Idee $2x_1+2x_2$, die sich aufgrund der Klammerauflösung ergibt, wird zunächst in einem dritten Speicherplatz das Doppelte des einen Eingabewertes erzeugt (ist mit einem Aufwand von $3x_1$ möglich) und dann in diesem dritten Speicherplatz auch noch das Doppelte des zweiten Eingabewertes besorgt, so dass gleichzeitig die Addition erfolgt (ist mit einem Aufwand von $3x_2$ möglich; insgesamt fallen also $3x_1+3x_2$ Rechenschritte an). Die nach der zweiten Idee geschickt konstruierte Maschine berechnet den Funktionswert von f also mit weniger Aufwand.

Hinsichtlich ihres Variablenverständnisses ist es für die Schüler erhellend, zu erleben, dass ihre Maschinen auch im Falle zugedeckter Zahlensichtfenster funktionieren: In Partnerarbeit stellt einer – nicht sichtbar für den anderen – Zahlenwerte ein, verdeckt die Sichtfenster und lässt den anderen dann mit der Maschine das Ergebnis produzieren. Es geht: man kann mit unbekannten, beliebig, aber fest gewählten Zahlen operieren.

2.6 Debugging-Aufgaben

Eine besondere Aufgabenart stellen Debugging-Aufgaben dar. Hier geht es darum, fertige Maschinen zu überprüfen und sie ggfs. zu reparieren. Im angegebenen Beispiel ist zu untersuchen, ob mit der konstruierten Maschine das Doppelte einer Zahl berechnet werden kann. Nicht nur die Erkenntnis ist wichtig, inwiefern eine Maschine funktioniert oder gerade nicht, sondern auch die Erkenntnis darüber, welche Möglichkeiten bestehen, eine nicht funktionierende Maschine zu reparieren. (Abb.13: Arbeitsblatt "*Stimmt es?* "). Erlernen Schüler später zusätzlich die formale Notation für solche Berechnungsvorgänge, kann beobachtet werden, dass einige von ihnen besser in der Lage sind, den Fehler in der formalen Notation zu erkennen und zu korrigieren als ihn in der Maschine aufzuspüren und zu reparieren. Die unterschiedlichen Repräsentationsformen – enaktiv, ikonisch, symbolisch – sind hier im Brunerschen Sinne zu bewerten, nämlich nicht als in einer festen Hierarchie stehend sondern unterschiedlich nebeneinander existierend mit diversen Wechselwirkungsmöglichkeiten (vgl. Bruner 1964).

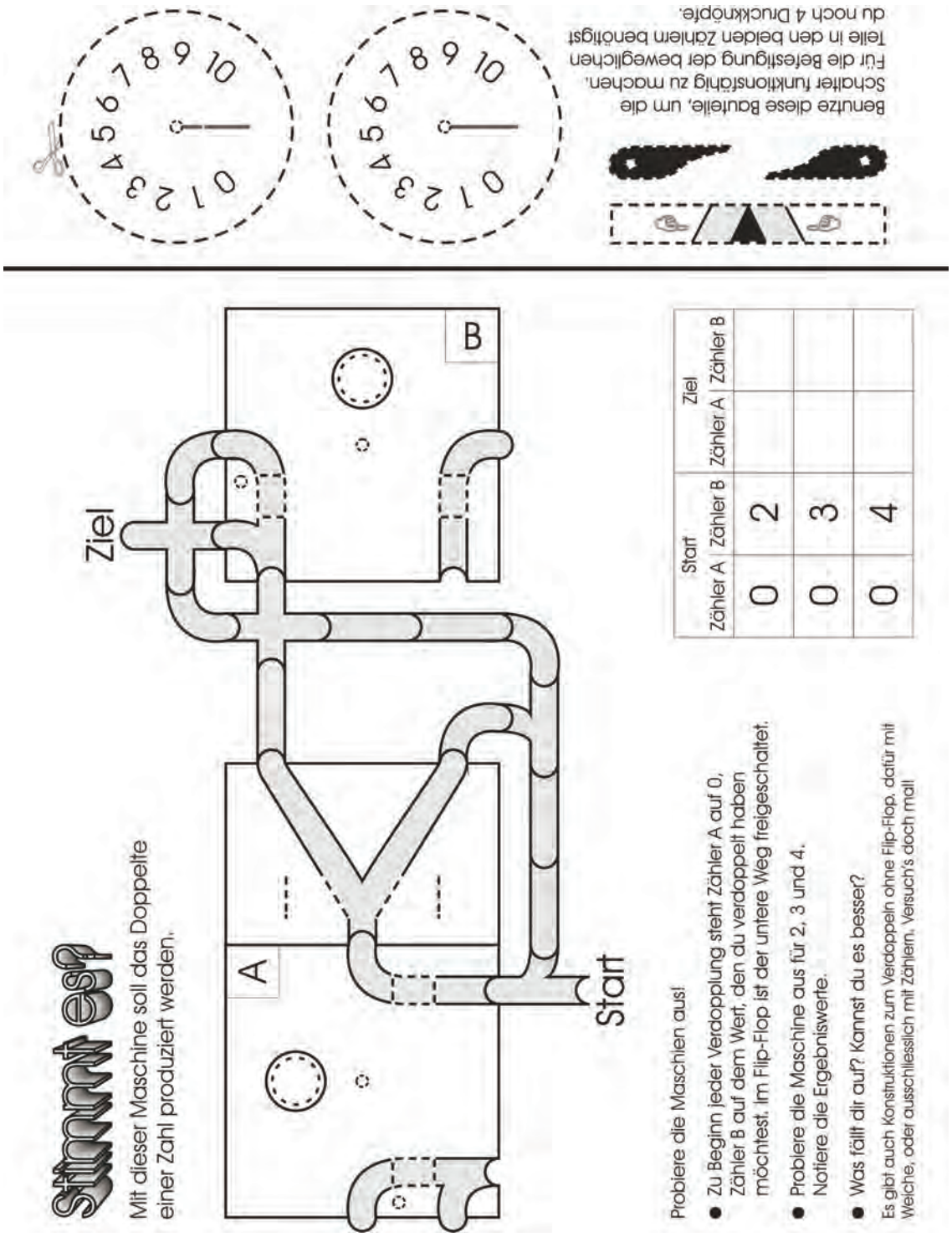


Abb. 13: Arbeitsblatt "Stimmt es?"

3. Zur Entstehungsgeschichte der DYNAMISCHEN LABYRINTHE

Die Verwendung der DYNAMISCHEN LABYRINTHE als Unterrichtsmaterial sowie als Werkzeug bei der Erforschung bestimmter kognitiver Vorgänge, die zentral für mathematisch-logisches Denken sind, begann in den 70er Jahren des letzten Jahrhunderts. Sie in den Abschnitten 3 und 4 darzustellen, dient dazu, die vielfältigen, verzweigten und sich immer wieder befruchtenden Aspekte bei der Forschungs- und Entwicklungsarbeit von Elmar Cohors-Fresenborg im Kreise seiner Kollegen, Mitarbeiter und Schüler zu beleuchten.

3.1 Die Ursprünge: Bausteine entstehen in Handarbeit

Die Wurzeln reichen in die Doktorandenzeit des Elmar Cohors-Fresenborgs am Münsteraner Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung, in der er in der Forschergruppe seines Lehrers Dieter Rödding die Entstehung und Bewährung eines Konzeptes der sequentiellen Netzwerke endlicher Automaten miterlebte. Zum Beispiel konnte sein Studienkollege Thomas Ottmann zeigen, dass sich jeder endliche Automat durch ein Netzwerk simulieren lässt, in dem neben Verbindungsstücken nur Einmündungen und Weichen als Automatenbausteine benötigt werden (Ottmann 1973). Als Elmar Cohors-Fresenborg zum 1. Oktober 1973 seine erste Professur an der Pädagogischen Hochschule in Flensburg antrat, baten ihn die dortigen Kollegen, sich auch um die Betreuung der zahlreichen Studenten mit dem Studienschwerpunkt Mathematik für die Grundschule zu kümmern. Ihm kam in dieser Zeit – nicht zuletzt auch dadurch beeinflusst, dass die elektronisch gesteuerten, automatisierten Prozesse zunehmend in Industrie und Verwaltung an Bedeutung gewannen – die Idee, ein Veranschaulichungsmittel zu kreieren, das schon Kindern im Grundschulalter erlaubt, auf spielerische Weise ein Verständnis für grundlegende Prinzipien automatisch ablaufender Prozesse zu entwickeln. Die kurz zuvor in Münster etablierten Automaten-Ideen sollten als Baukasten mit mechanisch funktionierenden Bausteinen entstehen. Im Rückblick mutet die Entstehungsgeschichte vielleicht ein wenig sonderlich an: Zu Beginn des Jahres 1974 bastelte Elmar Cohors-Fresenborg im Keller mit seiner Laubsäge aus Holz erste Prototypen der Bausteine. Es gelang ihm, in Handarbeit Flip-Flop, Weiche und Zähler tatsächlich mit einem funktionsfähigen Mechanismus auszustatten (vgl. Abb.14).

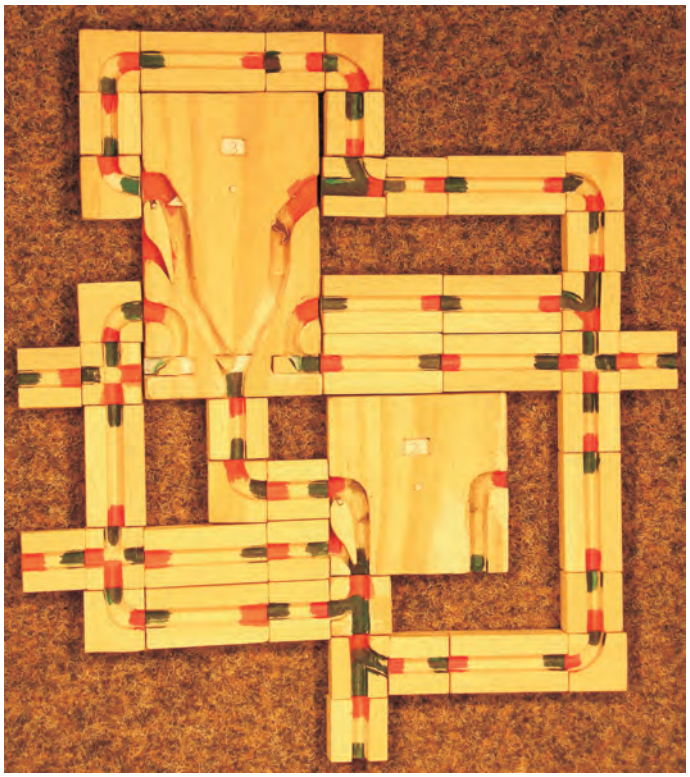


Abb.14: Maschine zum Addieren bzw. Subtrahieren
aus den ersten Holzbausteinen

Abb.15: Die drei Generationen der DYNAMISCHEN LABYRINTHE Bausteine

3.2 Erste Unterrichtserprobungen

Ausgerüstet mit einer handgefertigten Kleinserie, bei der die einzelnen Bausteine mit Klettband auf Teppichbodenresten zu befestigen waren, fanden 1974 im Sommersemester Fachpraktika mit ersten Unterrichtsversuchen in je einem dritten und einem vierten Schuljahr statt. Im darauf folgenden Wintersemester erprobten Studenten in Fachpraktika Unterrichtsreihen in je einem ersten, zweiten und dritten Schuljahr. Eine erste Examensarbeit über diese Unterrichtserprobungen (Muxfeldt, 1975) begründete zugleich die Tradition im Hause Cohors-Fresenborg, engagierte Studenten frühzeitig in die Forschungs- und Entwicklungsarbeit einzubeziehen.

3.3 Produktion des Baukastens DYNAMISCHE LABYRINTHE

Schon bald stand der Wechsel von Elmar Cohors-Fresenborg zu der aus einer Pädagogischen Hochschule neu hervor gegangenen Universität Osnabrück an. Bei den Berufungsverhandlungen konnte die damalige Vorsitzende der Haushaltskommission, Ursula Viet, von den Chancen die mit dem Einsatz der DYNAMISCHEN LABYRINTHE verbunden sind, schnell überzeugt werden. Sie sorgte für die finanziellen Möglichkeiten, um durch die Beschützenden Werkstätten Osnabrück eine größere Anzahl von Bausätzen herstellen zu lassen. Die Bausteine wurden nun aus Hartplastik gefräst und mit einem Metallstift versehen, damit die Befestigung für Schaltungskonstruktionen auf gelochten Holzplatten erfolgen konnte. Als Aufbewahrungsort dienten ab sofort eigene Kisten. 1977 wurde schließlich entschieden – unterstützt durch Sponsoren – Spritzgusswerkzeuge bauen zu lassen, mit denen immer wieder kostengünstig Kleinserien produziert werden können (Abb. 15).

4. Zur Geschichte des Einsatzes der DYNAMISCHEN LABYRINTHE

4.1 Unterrichtspraxis

Die erstaunlichen und wegweisenden Möglichkeiten des Einsatzes der DYNAMISCHEN LABYRINTHE im Unterricht beruhen darauf, dass zum einen mit ihnen die Vergegenständlichung und damit unmittelbare Be–*greif*–barkeit von fundamentalen mathematischen Ideen möglich ist und dass zum anderen die Bedeutung der Computer in den letzten Jahrzehnten im Alltag enorm zugenommen hat. Unterricht, der das Erlernen und Verstehen der grundlegenden »Funktionieren – aber wie?«-Ideen ermöglicht, wird zunehmend zu einem selbstverständlichen und verbindlichen Bildungsangebot (s. dazu auch Schwank, 2004).

4.1.1 Grundschule

Mathematik-Arbeitsgemeinschaften

Immer wieder sind die DYNAMISCHEN LABYRINTHE in der Grundschule Gegenstand mathematikdidaktischer Forschungs- und Entwicklungsarbeit geworden. Aufbauend auf den kognitionstheoretischen Überlegungen zum Unterschied prädikativer versus funktionaler kognitiver Strukturen ist eine Unterrichtseinheit zur Propädeutik des Programmierens für das dritte Schuljahr entwickelt und erprobt worden. Die Ergebnisse sind in einer Dokumentation exemplarischer Unterrichtsstunden veröffentlicht worden (Schwank, Bartz & Hörnschemeyer, 1998; Schwank, 1998).

Förderunterricht

Die Möglichkeiten, die die DYNAMISCHEN LABYRINTHE für einen wenig sprach- aber stark problemorientierten Zugang zur Förderung mathematischen Denkens und Problemlösens bieten, bewogen die Bezirksregierung Weser-Ems 1982, die Eignung des Materials für einen besonderen Förderunterricht im 3. Schuljahr einer Grundschule in der Osnabrücker Innenstadt – damals wie heute mit einem hohen Anteil von Kindern mit Migrationshintergrund – erproben zu lassen. Die Tatsache, dass auch Kinder mit sehr geringen Deutschkenntnissen ihre Chance zu selbständigem Lösen schwieriger Aufgaben erfahren konnten, hat ihr Selbstwertgefühl und in Folge ihre Einstellung zur Schule deutlich verbessert (Cohors-Fresenborg & Abrahamczyk, 1982).

4.1.2 Orientierungsstufe

Im Schuljahr 1976/77 betreute Elmar Cohors-Fresenborg die umfangreiche Erprobung der DYNAMISCHEN LABYRINTHE mit standardisierten Unterrichtsentwürfen in 17 fünften Klassen in zwei Osnabrücker Orientierungsstufen[1].

Es entstand die Idee, eine abgeschlossene Unterrichtsreihe zum Thema "*Warum können Automaten rechnen?*" zu entwickeln. Ursula Viet regte an, diese Unterrichtsreihe in der Gestalt von Heften zur programmierten Unterweisung zu konzipieren und stellte sich mit ihrer Kompetenz auf diesem Gebiet als Gewährsperson zur Verfügung. In Zusammenarbeit mit den beiden Studentinnen Doris Finke und Sigrid Schütte entstand schließlich eine Folge von neun Heften mit einem Lehrerhandbuch (Cohors-Fresenborg, Finke & Schütte, 1979a). Schon bald

1. Anlass war die Betreuung einer größeren Gruppe von Fachpraktikanten im Rahmen des damals an der Universität Osnabrück stattfindenden Modellversuchs "Einphasige Lehrerausbildung", bei der der Universität auch die unterrichtspraktische Ausbildung der Studierenden (bei einhergehender Studienzeitverlängerung) oblag.

wurden die Hefte für Schüler ins Englische übersetzt (Cohors-Fresenborg, Finke & Schütte, 1979b). Der Auftritt von Elmar Cohors-Fresenborg in der WDR-Fernsehsendung "Computerclub" bei Wolfgang Back 1984 brachte u.a. das Angebot eines niederländischen Lehrers, der durch die Sendung Interesse am Einsatz der DYNAMISCHEN LABYRINTHE bei seinen Schülern gefunden hatte, die Hefte für Schüler in seine Landessprache zu übersetzen (Cohors-Fresenborg, Finke & Schütte, 1984).

Gewinnbringend wurden die DYNAMISCHEN LABYRINTHE auch in speziellen Förderkursen für Orientierungsstufenschüler mit Hauptschulzuweisung eingesetzt.

4.1.3 Sekundarstufe I

Gymnasium

Die Idee, über den Bau von DYNAMISCHEN LABYRINTHEN zu einer Einführung der Registermaschinen-Programmierung[1] und von dort weiter zur Einführung des Funktionsbegriffs zu gelangen, führte zur Konzeption und Erprobung einer Unterrichtsreihe "*Registermaschinen und Funktionen*" für Klasse 8 im Gymnasium. Gemeinsam mit Mathilde Griep erprobte die Autorin die Ideen im Fachpraktikum. Aus den Unterrichtvor- und Nachbereitungen entstand ein Textbuch für Schüler (Cohors-Fresenborg, Griep & Schwank, 1979). Mathilde Griep schrieb über die didaktische Analyse und die Konzeption einiger exemplarischer Stundenentwürfe ihre Examensarbeit, die dann Grundlage für ein Lehrerhandbuch wurde (Cohors-Fresenborg & Griep, 1982), während sich die Autorin in Automatentheorie vertiefte (Schwank 1982, 1984, 1987a).

In einem späteren Gutachten für den Niedersächsischen Kultusminister wurden die Ideen zur handlungsorientierten Mathematik fußend auf den DYNAMISCHEN LABYRINTHEN zusammengeführt (Schwank, 1987b). Dieses erwies sich als wichtige Grundlage für den algorithmischen Teil des Schulversuchs "*Integration algorithmischer und axiomatischer Denkweisen in den gymnasialen Mathematikunterricht (Klasse 7/8) als Beitrag zur informations- und kommunikationstechnologischen Bildung*" des Niedersächsischen Kultusministeriums (Cohors-Fresenborg & Kaune, 1993). Dieser Versuch wurde in den Jahren 1987-1993 durchgeführt; die wissenschaftliche Begleitung oblag Elmar Cohors-Fresenborg. Im zugehörigen Schulbuch (Cohors-Fresenborg, Kaune & Griep, 1995) bilden die DYNAMISCHEN

1. Die Registermaschine wurde als ein mathematisches Konzept in der Theorie der Berechenbarkeit und Entscheidbarkeit – als Ersatz für das bis dahin übliche Konzept der Turing-Maschine – von Dieter Rödding eingeführt (Rödding, 1968). Es hat zu vielen neuen Resultaten geführt, aber auch zu stark vereinfachten Beweisen (vgl. z. B. Cohors- Fresenborg, 1977, S. 37-42).

LABYRINTHE weiterhin die Basis für den Aufbau von tragfähigen Vorstellungen zum Funktionsbegriff.

Realschule

Parallel zu dem gymnasialen Schulversuch wurden im Auftrag des Schulaufsichtsamtes Osnabrück Fortbildungen für Realschullehrer angeboten, die dabei, ausgehend von den DYNAMISCHEN LABYRINTHEN, über die Registermaschinensprache in die damals in den Schulen verbreiteten Programmiersprachen BASIC und PASCAL eingeführt wurden.

4.1.4 Unterricht mit hörgeschädigten Schülern

Die Erfolge beim Einsatz der DYNAMISCHEN LABYRINTHE führten dazu, im Rahmen einer vom Niedersächsischen Ministerium für Wissenschaft und Kunst (mit Mitteln aus dem Niedersachsen-Vorab der VW-Stiftung) von 1981 bis 1983 geförderten Pilotstudie zu erproben, wie sich auf einer handlungsorientierten, algorithmischen Grundlage der Mathematikunterricht für hörgeschädigte Schüler in den Jahrgängen 5 und 6 verbessern ließe. Der Erfolg dieser Pilotstudie und die guten Erfahrungen mit der Unterrichtsreihe "*Registermaschinen und Funktionen*" im Gymnasium ließen den Niedersächsischen Sozialminister am Landesbildungszentrum für Hörgeschädigte in Osnabrück 1984-1987 in den Klassen 5 bis 10 den BLK-Modellversuch "*Algorithmisches Denken im Mathematikunterricht mit Hörgeschädigten*" durchführen, um Hörgeschädigten auf der Grundlage eines Verständnisses von Algorithmen eine tragfähige Einführung in den Funktionsbegriff zu geben und darauf aufbauend die Behandlung der Gebiete der Schulalgebra neu zu erschließen (Cohors-Fresenborg, 1985b; 1986; Schwank, Cohors-Fresenborg & Goldberg, 1984).

4.1.5 Veranstaltungen zur Theoretischen Informatik

Bei der Behandlung der Ideen der Berechenbarkeit und der Komplexität von Algorithmen sind die DYNAMISCHEN LABYRINTHE auch bei Studenten ein beliebtes Beispiel. Gerne wurden Wettbewerbe durchgeführt, wem die beste Konstruktion einer Maschine bzw. eines Registermaschinen-Programms gelang. Manchmal gab es dafür auch Medaillen (Abb.16a,b).

Abb. 16a: Medaillen-Vorderseite

Abb. 16b: Medaillen-Rückseite

Peter Hawighorst (1993), Ansgar Striethorst (1997), Stephan Armbrust (1999) sowie die Autorin haben sich zu einschlägigen Staats- bzw. Diplomarbeiten anregen lassen; Peter Hawighorst (1997), Wolfgang Stolzmann (1997), Stephan Armbrust (in Arbeit) wie auch die Autorin zu weiterführenden Dissertationen.

4.2 Kognitionspsychologische Experimente

Unschätzbar ist Ursula Viets große Erfahrung mit empirischen Studien, die sie von Anfang an in die Diskussionen mit Elmar Cohors-Fresenborg einbrachte. Berichten zu Unterrichtsbeobachtungen begegnete sie mit dem Ratschlag, über die Durchführung solcher Untersuchungen nachzudenken, die auch kognitive und affektive Variablen mit einbeziehen. Eine große Bereicherung der Osnabrücker mathematikdidaktischen Forschungsarbeit in den frühen Jahren ergab sich durch den Eintritt des Münsteraner Psychologen Hans-Joachim Strüber zugleich in beide der Osnabrücker Mathematik-didaktik-Arbeitsgruppen. Ihm ist zu verdanken, dass das Osnabrücker Theorie-spektrum frühzeitig um kognitionspsychologische Aspekte erweitert worden ist und im weiteren Verlauf, dass sich die Autorin mit der Mathematikdidaktik anfreundete und nach ihrer Promotion in Mathematik offen war für eigene Fragestellungen, die

sich nicht allein dem mathematischen Inhalt sondern auch – oder gar zuvörderst – dem mathematischen Denken widmen. Die Idee der Automaten, die Elmar Cohors-Fresenborg aus Münster über Flensburg nach Osnabrück gebracht hatte, stellte dabei in ihren unterschiedlichen Anwendungszusammenhängen – sei es zum Anfassen wie bei den DYNAMISCHEN LABYRINTHEN oder als Skizzen und Formeln wie in den üblichen mathematischen Schriften – eine tragfähige Brücke dar.

4.2.1 Nonverbale mathematische Begriffsbildung

Elmar Cohors-Fresenborg und Hans-Joachim Strüber präzisierten schon früh ihre Ideen, dass man – wie man es heute ausdrücken würde – mit den DYNAMISCHEN LABYRINTHEN den Anteil nonverbaler Begriffsbildung bei bestimmten Basisformen mathematischen Denkens untersuchen könne. Die bei den zahlreichen Unterrichtseinsätzen mit DYNAMISCHEN LABYRINTHEN beobachteten Unterschiede von Schülern, Probleme zu lösen, führten Ende der 70er Jahre zu ersten Fallstudien in Form von klinischen Interviews und später in Form von konstruktivistischen Lehrexperimenten. Die Tatsache, dass beim Bau von DYNAMISCHEN LABYRINTHEN sichtbare Spuren des Denkens entstehen, die eine gewisse Auskunft über die ablaufenden Denkprozesse etwa auch ohne die Methode des "Lauten Denkens" geben, machte hier Denkuntersuchungen unter Videobeobachtung außerordentlich interessant.

Über die Ergebnisse der durchgeführten Untersuchungen wurde im internationalen Rahmen erstmals auf der 2nd Conference for the Psychology of Mathematics Education vorgetragen (Cohors-Fresenborg, 1978), die von Elmar Cohors-Fresenborg nach Osnabrück geholt worden war. Noch heute trifft man auf damalige Tagungsteilnehmer, die vom erstklassigen Buffet der Osnabrücker Mensa beim Tagungsbankett schwärmen. Für die Autorin brachte die Tagung eine erste Berührung mit der Mathematikdidaktik: aufgrund ihrer damals exzellenten Französischkenntnisse wurde sie als studentische Hilfskraft zur Mitarbeit während der Konferenz eingestellt, um den damals weniger der englischen Sprache mächtigen französischen Didaktikkollegen einen besonderen Service zu bieten. Daraufhin wurde sie u.a. zu ihrem ersten ausländischen Gastvortrag eingeladen und berichtete in Grenoble über die DYNAMISCHEN LABYRINTHE (Schwank 1980).

Studien mit hörgeschädigten Kindern

Als "Härtetest" für ihre Ideen führten Elmar Cohors-Fresenborg und Hans-Joachim Strüber eine Vergleichsuntersuchung zwischen einem dritten Schuljahr mit gesunden Kindern und einem vierten Schuljahr mit hörgeschädigten Kindern durch[1]. Für die Fachleute am Landesbildungszentrum für Hörgeschädigte in Osnabrück war es völlig überraschend, dass ihre hörgeschädigten Kinder beim mathematischen Problemlösen mit den DYNAMISCHEN LABYRINTHEN besser abschneiden konnten als die Kinder aus der Vergleichsgruppe (Cohors-Fresenborg & Strüber, 1982).

Besonderes Interesse galt einem von Geburt an gehörlosen Schüler, dessen Problemlöseverhalten sich seine Lehrer nicht erklären konnten und der offensichtlich auch überhaupt nicht von den Vorteilen, die nach Cohors-Fresenborg & Strüber (1982) ein handlungsorientierter Zugang zu mathematischer Begriffsbildung bieten sollte, profitierte. Im Rahmen der ersten beiden der vom 1984 gegründeten Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e.V. eingeworbenen Forschungsaufträge konnte gezeigt werden, dass die Erklärung in der ausgeprägten Präferenz dieses Schülers für prädikatives Denken zu sehen ist (dokumentiert in Cohors-Fresenborg, 1985b, S. 11-14). Ein mutiger Versuch, ihm direkt die formale Sprache der Registermaschinen zu erschließen, war beeindruckend erfolgreich (Schwank, 1986; Cohors-Fresenborg, 1986, S. 12-14; Schwank, 1987b, S. 23/24). Das Ergebnis stellte viele Gewissheiten von im Unterricht mit Hörgeschädigten erfahrenen Lehrkräften über die Rolle von Sprache bei mathematischer Begriffsbildung in Frage.

Studie mit einem aphasischen Kind

In jener Zeit entwickelte sich eine über zwei Jahrzehnte andauernde Zusammenarbeit mit Fancis Lowenthal, wie Elmar Cohors-Fresenborg damals ebenfalls junger Logiker, der an der Universität im belgischen Mons in der Lehrerausbildung tätig war. Wegen der Nähe seiner Arbeitsgruppe zu psycholinguistischen Forschungsfragen erkannte Fancis Lowenthal die Möglichkeiten, welche der Einsatz der DYNAMISCHEN LABYRINTHE als *nonverbal communication devices* bot (Lowenthal & Marcq, 1982; Lowenthal, 1984). Aufsehen erregend war der Erfolg, den er mit dem Einsatz der DYNAMISCHEN LABYRINTHE bei der Arbeit mit einem aphasischen Jungen erzielen konnte (Lowenthal & Saerens, 1986).

Studien mit ADS-Kindern

Die langjährigen Erfahrungen mit dem Einsatz der DYNAMISCHEN LABYRINTHE haben auch dazu geführt, dass bislang zwei Studien mit ADS-diagnostizierten Kindern

1. Wegen des schon in der Grundschule üblicherweise starken Zurückfallens hörgeschädigter Kinder im Fach Mathematik war als Vergleichsgruppe eine ein Jahr jüngere Grundschulklasse gewählt worden.

unternommen worden sind (Gawlik, 2003) und eine dritte im Sommer 2006 ansteht. Auch diese Kinder profitieren von den gegebenen, teils fesselnden Interaktionsmöglichkeiten und oftmals unmittelbaren Rückmeldungen z.B. wenn Erprobungs-"fahrten" getätigt werden.

4.2.2 Einzelfallstudien zum Problemlöseverhalten

Ein besonderes Untersuchungsinteresse galt der Wechselwirkung von äußeren Repräsentationsformen und mentalen Modellen (z.B. Cohors-Fresenborg, 1985a; Kaune, 1985; Schwank, 1979, 1993).
Schon früh war in mit einzelnen Grundschülern durchgeführten Pilotstudien aufgefallen, dass ein zentraler Unterschied im Vorgehen beim Konstruieren von Schaltungen mit den DYNAMISCHEN LABYRINTHEN darin besteht, ob vorabplanend (später "*begrifflich*" genannt) oder schrittweise-interaktiv (später "*sequentiell*" genannt) gearbeitet wird. Christa Kaune (1985) untersuchte in ihrer Dissertation neben diesen beiden Problemlösestilen systematisch die individuellen Vorlieben von 7. Klässlern bei der Wahl der Repräsentationsformen "DYNAMISCHE LABYRINTHE" und "Registermaschine" (Cohors-Fresenborg & Kaune, 1984). Die Ergebnisse interessierte auch Software-Ergonomen (Cohors-Fresenborg & Kaune, 1985).

Die Untersuchungsergebnisse boten im weiteren Anlass, ein neues Aufgabenformat zu kreieren (Kaune, 2001b, S. 39/40) und eine neue Unterrichtskultur zu etablieren, welche die individuellen Denkprozesse wie auch die Förderung der metakognitiven Fähigkeiten der Schüler in den Mittelpunkt stellt (Kaune, 2001a; Cohors-Fresenborg & Kaune, 2003).

4.2.3 Einzelfallstudien zu geschlechtsspezifischen Unterschieden

Bei den zahlreichen Untersuchungen zu individuellen Unterschieden beim mathematischen Denken und Problemlösen unter Einsatz der DYNAMISCHEN LABYRINTHE war aufgefallen, dass es vergleichsweise eher selten erfolgreich funktional denkende Mädchen gab. Es drängte sich die Vermutung auf, ob in der weniger ausgeprägten funktionalen Begabung einer der Gründe für die feststellbare geringere Präsenz von Frauen in naturwissenschaftlich-technischen Berufen gesehen werden könne. Der Landkreis Emsland hatte wegen der ihn bedrängenden sozialen Folgen aus der einseitigen Orientierung von Mädchen bei der Berufswahl ein Interesse an der Bearbeitung dieser Frage und erteilte dem Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e.V. einen zweijährigen Forschungsauftrag. Tatsächlich hatten die beteiligten Mädchen auch diesmal wieder größere Schwierigkeiten, sich auf die gestellten funktionalen Aufgaben mit den DYNAMISCHEN LABYRINTHEN

einzulassen (Schwank, 1992). Es überraschte später wenig, dass die Dekomposition des funktionalen und prädikativen Denkens zu Grundelementen führt, die sich in der Literatur zur Geschlechterforschung wieder finden lassen (Schwank, 2003).

4.2.4 Interkulturelle Vergleichsstudien

Studien mit indonesischen Schülern

Die Ergebnisse der kognitionsorientierten Forschung mit den DYNAMISCHEN LABYRINTHEN führten zu der Frage, inwieweit sich diese Resultate auch in einer ganz andersartigen als einer der westlichen Kulturen erzielen ließen. Ein langjähriger Studienaufenthalt des (von Misereor geförderten) indonesischen Kollegen Yansen Marpaung in Osnabrück bot die Gelegenheit zu einer interkulturellen DYNAMISCHEN LABYRINTHE / Registermaschinen-Vergleichsstudie mit deutschen und indonesischen Schülern. Anhand einer sehr präzisen Analyse des Schülerverhaltens konnte die Autorin, die die Untersuchungen Marpaungs in Indonesien betreute, vorführen, dass die beobachteten Unterschiede nicht wie bisher durch Unterschiede im Problemlösestil (begrifflich versus sequentiell) zu erklären seien, sondern Unterschiede in der Art der mentalen Modellierung postuliert werden müssten. Dies war die Geburtsstunde der Unterscheidung zwischen prädikativem und funktionalem Denken und der sich anschließenden These, dass es stabile, mehr oder weniger ausgeprägte individuelle Präferenzen für eine der beiden Denkarten gibt (Schwank, 1986).

In seiner Hauptstudie konnte Yansen Marpaung (1986) zeigen, dass das Begriffspaar prädikatives/funktionales Denken vom Begriffspaar begriffliches/sequentielles Problemlösen unabhängig ist. Die sowohl von Christa Kaune als auch Yansen Marpaung beobachteten individuellen Vorlieben für die Wahl einer geeigneten Einstiegsrepräsentation für die zu erfindenden oder zu analysierenden Algorithmen ließ sich ebenfalls erklären: Eine erfolgreiche Nutzung der Repräsentationsform "DYNAMISCHE LABYRINTHE" liegt ursächlich an einer individuellen Präferenz für funktionale kognitive Strukturen. Dieses führte funktionale indonesische Kinder schon nach kurzem Training im technisch-manipulativen Umgang mit den DYNAMISCHEN LABYRINTHEN zu deren Bevorzugung, obwohl Mitte der 80er Jahre diese Kinder keinerlei Erfahrung mit vergleichbaren Spielzeug wie z.B. Steckbausteinen hatten. Umgekehrt veranlasst eine Schwäche im funktionalen Denken leistungsstarke, prädikatives Denken bevorzugende Kinder dazu, die vermeintlich anschauliche Repräsentationsform der Rechennetze zu überspringen und einen gesuchten Algorithmus sofort in der formalen Sprache der Registermaschine zu formulieren (Marpaung, 1986, S. 44-47; Schwank, 1990).

Studien mit chinesischen Schülern – Weiterführende Grundlagenforschung

Die deutsch-indonesische Vergleichsstudie mit den DYNAMISCHEN LABYRINTHEN und den Registermaschinenprogrammen konnte später von Xu Bin Yan, die ein Graduiertenstipendium des Landes Niedersachsen erhalten hatte, in Shanghai in einer überarbeiteten Form durchgeführt werden (Xu, 1994). Mit den interkulturellen Vergleichsstudien war das Problem aufgetreten, welche Versuchspersonen bzw. Versuchspersonengruppen miteinander verglichen werden sollten. Ein wichtiges Kriterium war gewesen, etwas zur allgemeinen Intelligenz der Versuchspersonen zu erfahren. Zur engeren Auswahl der Versuchspersonen war schließlich der nonverbale Intelligenztest APM (Raven, 1965) eingesetzt worden. Der Testeinsatz bewährte sich. Erst später bemerkte die Autorin, dass unklar war, warum sowohl im prädikativ-logischen Denken Begabte wie auch im funktional-logischen Denken Begabte die Testaufgaben erfolgreich lösen konnten. Es schien zunächst als müssten bei den statisch gegebenen Musteranordnungen, wie sie mit den figuralen Matrizenaufgaben des APM-Tests vorliegen, die prädikativ Begabten im Vorteil sein. Die Lösung war, dass – je nach Konstruktion – in ein und derselben Matrizenaufgabe sowohl – prädikativ – eine strukturelle Anordnung wie auch – funktional – ein Prozessgeschehen wahrgenommen werden kann (Schwank, 1996). Diese Erkenntnis führte zur Konstruktion von neuen, optimierten Testaufgaben (Schwank, 1999/2000), die schließlich auch den Einsatz von neuen Untersuchungsmethoden zur Erforschung des funktionalen und prädikativen Denkens ermöglichten (EEG-Untersuchung: Mölle et al. 2000; verschiedene Blickbewegungs-Untersuchungen: z.B. Schwank, 2002; Cohors-Fresenborg et al. 2003). Die Unterscheidung der beiden Denkarten hätte auch einen anderen Ausgangspunkt nehmen können. In der Geschichte der Osnabrücker Mathematikdidaktik sind es ausgewiesener Maßen die DYNAMISCHEN LABYRINTHEN, denen die entscheidende Schlüsselrolle zukommt.

4.2.5 Studie mit Managern

Mitte der 90er Jahre bot sich die Gelegenheit, die Unterscheidung zwischen prädikativem und funktionalem Denken auch für Erklärungen von Entwicklungen im Bereich des Business Reengineering heranzuziehen. In einer Pilotstudie zum Cognitive Business Reengineering spielten Aufgaben mit den DYNAMISCHEN LABYRINTHEN eine wichtige Rolle (Cohors-Fresenborg & Schwank, 1997). Das dabei beobachtete Verhalten der Manager war bei gleicher kognitiver Struktur mit dem von Schülern und Studierenden in China, Deutschland und Indonesien vergleichbar: Die Erfindung der Konstruktion eines 2er-Verteilers mit einer Weiche scheidet eben die Geister.

4.3 Entwicklung weiterer Unterrichtsmaterialien

Die Entstehungsgeschichte der DYNAMISCHEN LABYRINTHE ist – in der Lehrerausbildung in Osnabrück – Vorbild und Maßstab geworden für die Entwicklung weiterer Materialien für den Mathematikunterricht in der Primarschule (Klassen 1-6): Zunächst gilt es, sich eine mathematische Idee bzw. ein mathematisches Ideengefüge gründlich und umfassend zu erarbeiten. Erst auf einer solchen soliden Grundlage kann ernsthaft damit begonnen werden, eine gegenständliche Formgebung, greif- und manipulierbares Spielzeug zu diesen Ideen und ihren Beziehungen zu erfinden. Ausgehend u.a. von der Dedekindschen Erklärung der natürlichen Zahlen (Dedekind 1969/1887) und unter Einbeziehung kognitionstheoretischer Überlegungen sind auf diese Weise gemeinsam mit Studentinnen die *Rechenwendeltreppe*, der *Zahlenbaum* und das *Zahlen-Hochhaus* entwickelt und schießlich im Unterricht erprobt worden (Aring & Blocksdorf, 2003; Schwank, Aring & Blocksdorf, 2005; Kronemeyer & Schomakers, 2004; Kraicziczek, 2005; Schnalle & Schwank, 2006; Schwank, 2005). Im aktuellen Unterrichtsmaterial-Projekt "*Auf und ab in den Burgtürmen – Von Zählprotokollen zu geschickten Berechnungen*" (Voogd, in Arbeit) wird eine enaktive Repräsentation für das Handeln in Stellenwertsystemen untersucht, die nicht auf der Bündelungsidee, sondern auf der Taktgebungsidee beruht (Ruf & Gallin, 1999; Schwank, 2005).

4.4 DYNAMISCHE LABYRINTHE – Online

Vielfältige, teils interaktiv nutzbare Informationen zu den DYNAMISCHEN LABYRINTHEN werden im Internet angeboten:
http://www.ikm.uni-osnabrueck.de/aktivitaeten/dl/dynamische-labyrinthe.htm

5. Schlusswort

Sollte aufgrund der Vielfalt der Berichte zum Einsatz der DYNAMISCHEN LABYRINTHE der Eindruck entstanden sein, dass sich das Forscher- und Entwicklerleben von Elmar Cohors-Fresenborg auf eine Auseinandersetzung mit diesen reduzieren ließe, so läge ein Irrtum vor. Möglicherweise gibt es einen Anlass zum 70. Geburtstag, einen der weiteren Schwerpunkte seiner Arbeit zu würdigen. Wer neugierig geworden ist, mag schon zuvor Elmar Cohors-Fresenborgs homepage besuchen: http://www.ikm.uni-osnabrueck.de/mitglieder/cohors/cohors.html.

6. Literatur

Aring, A. & Blocksdorf, K. (2003): Rechnen im 1. Schuljahr: Betritt die Rechenwendeltreppe!. Unveröffentlichte Staatsarbeit. Universität Osnabrück.

Armbrust, S. (1999): Prozeßorientierte Vorstellungen zu Mealy- und αβγ-Automaten. Unveröffentlichte Diplomarbeit. Universität Osnabrück.

Armbrust, S. (in Arbeit): Die Werkzeuge "CoDyLa" und "QuaDiPF-Eye" zur Untersuchung funktionalen/prädikativen Denkens sowie ihre empirische Erprobung. [Projekt: Dissertation. Universität Osnabrück].

Bruner, J. (1964): Der Verlauf der kognitiven Entwicklung. In D. Spanhel (1973, Hrsg.), Schülersprache und Lernprozesse. Düsseldorf: Schwann).

Cohors-Fresenborg, E. (1977): Mathematik mit Kalkülen und Maschinen. Braunschweig: Vieweg.

Cohors-Fresenborg, E. (1978): Learning problem solving by developing automata networks. In E. Cohors-Fresenborg & I. Wachsmuth (Eds.), Proceedings of the 2nd International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 108-115. Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe D, Band 1. Osnabrück.

Cohors-Fresenborg, E. (1985a): Verschiedene Repräsentationen algorithmischer Begriffe. *Journal für Mathematikdidaktik*, 187-209.

Cohors-Fresenborg, E. (1985b): Algorithmisches Denken im Mathematikunterricht mit Hörgeschädigten. BLK-Modellversuch Nr. 830 30 50. Erster Sachbericht. Universität Osnabrück.

Cohors-Fresenborg, E. (1986): Algorithmisches Denken im Mathematikunterricht mit Hörgeschädigten. BLK-Modellversuch Nr. 830 30 50. Zweiter Sachbericht. Universität Osnabrück.

Cohors-Fresenborg, E. & Abrahamczyk, P. (1982): Förderung von ausländischen Schülern im Mathematikunterricht der Grundschule. Abschlussbericht für die Bezirksregierung Weser-Ems. Osnabrück.

Cohors-Fresenborg, E., Finke, D. & Schütte, S. (1979a): DYNAMISCHE LABYRINTHE. Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe U, Hefte 1-9, 1A-9A, 22 (Lehrerbegleitheft). Osnabrück.

Cohors-Fresenborg, E., Finke, D. & Schütte, S. (1979b): Dynamic Mazes. Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe U, Hefte 11-19, 11A-19A. Osnabrück.

Cohors-Fresenborg, E., Finke, D. & Schütte, S. (1984): Dynamische labyrinten – Onderwijsprogramma voor de bouwkast DYNAMISCHE LABYRINTHE. Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe U, Hefte 31-39, 31A-39A. Osnabrück.

Cohors-Fresenborg, E. & Griep, M. (1982): Registermaschinen und Funktionen. Didaktische Analyse und methodische Ausarbeitung einer Unterrichtsreihe. Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe U, Heft 25. Osnabrück.

Cohors-Fresenborg, E., Griep, M. & Schwank, I. (1979): Registermaschinen und Funktionen. Ein Schulbuch zur Einführung des Funktionsbegriffs auf der Grundlage von Algorithmen. Osnabrücker Schriften zur Mathematik, Reihe U, Heft 22. Osnabrück.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (1984): Sequential versus conceptual – Two modes in algorithmic thinking. In Proceedings of the 8th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 261-267. Sydney.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (1985): Handlungsorientierte Lernumgebungen und kognitive Strategien beim Programmieren. In H.-J. Bullinger (Hrsg.), Software-Ergonomie 85, 406-419. Stuttgart: Teubner.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (1993): Zur Konzeption eines gymnasialen mathematischen Anfangsunterrichts unter kognitionstheoretischem Aspekt. *Der Mathematikunterricht*, 3, 4-11.

Cohors-Fresenborg, E.; Brinkschmidt, S. & Armbrust, S. (2003): Augenbewegungen als Spuren prädikativen oder funktionalen Denkens. In I. Schwank: Themenheft 'Zur Kognitiven Mathematik', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 35/3, 86-93.

Cohors-Fresenborg, E. & Kaune, C. (2003): Mechanismen des Wirksamwerdens von Metakognition bei Verstehensprozessen im Mathematikunterricht. In L. Hefendehl-Hebeker & S. Hußmann (Hrsg.): Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie, 21-34. Hildesheim: Franzbecker.

Cohors-Fresenborg, E., Kaune, C. & Griep, M. (1995): Einführung in die Computerwelt mit Registermaschinen. Textbuch für Schüler. 5. überarbeitete Auflage. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Cohors-Fresenborg, E. & Schwank, I. (1997): Individual differences in the managerial representation of business processes. In R. Pepermans, A. Buelens, C. Vinkenburg, & P. Jansen (Eds.), Managerial Behaviour and Practices, 93-106. Leuven: Acco.

Cohors-Fresenborg, E., & Strüber, H. J. (1982): The learning of algorithmic concepts by action. A study with deaf children. In F. Lowenthal, F. Vandamme &J. Cordier (Ed.), Language and Language Acquisition, 95-106. New York: Plenum Press.

Dedekind, R. (1969 / 1887): Was sind und was sollen die Zahlen? Studienausgabe der 10. Auflage. Braunschweig: Vieweg.

Erk, K. & Priese, L. (2000): Theoretische Informatik. Berlin: Springer.

Gawlik, M. (2003): Funktionales versus prädikatives Denken bei ADS-Kindern in der Grundschule. Unveröffentlichte Staatsarbeit. Universität Osnabrück.

Hawighorst, P. (1993): Automatentheoretische Modellierung von Handeln aufgrund qualitativer Begründungen. Unveröffentlichte Diplomarbeit. Universität Osnabrück.

Hawighorst, P. (1997): Rough-Set-Theory und $\alpha\beta\gamma$-Automaten. Dissertation. Universität Osnabrück.

Kaune, C. (1985): Schüler denken am Computer – Eine Untersuchung über den Einfluß von Repräsentationsformen und kognitiven Strategien beim Konstruieren und Analysieren von Algorithmen. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Kaune, C. (2001a): Merkmale eines konstruktivistischen Unterrichtsskripts und eine Analyse dazugehöriger Lehr- und Lernprozesse, *Der Mathematikunterricht*, 1, 14-34.

Kaune, C. (2001b): Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts: Die kognitionsorientierte Aufgabe ist mehr als "die etwas andere Aufgabe", *Der Mathematikunterricht,* 1, 35-46.

Kraicziczek, K. (2005): Das Zahlen-Hochhaus: Erforschung multiplikativer Zusammenhänge in der Grundschule. Unveröffentlichte Staatsarbeit. Universität Osnabrück.

Kronemeyer, S. & Schomakers, B. (2004): Rechnungen passieren: Bewegungen im Zahlenbaum. Unveröffentlichte Staatsarbeit. Universität Osnabrück.

Lowenthal, F. & Marcq, J. (1982): How do children discover strategies? In A. Vermandel (Ed.), Proceedings of the 6th Conference for Psychology of Mathematics Education, 156-161 und 287-292. Antwerpen.

Lowenthal, F. (1984): Productions langagières d'enfants manipulant un dispositif non-verbal de communication. *Revue de Phonétique Appliquée*, 69, 11-46.

Lowenthal, F. & Saerens, J. (1986). Evolution of an aphasic child after the introduction of NVCDs. In F. Lowenthal & F. Vandamme (Eds.), Pragmatics and Education, 301-330. New York: Plenum Press.

Marpaung, Y. (1986): Profile indonesischer Schüler beim Umgang mit Algorithmen und ihre Analyse. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Mölle, M., Schwank, I, Marshall, L., Klöhn, A. Born, J. (2000): Dimensional complexity and power spectral measures of the EEG during functional versus predicative problem solving. Brain and Cognition. 22/3, 547-563.

Muxfeldt, H. (1975): Ein Versuch zur Automatentheorie in der Primarstufe mit dem Lehrmittel "DYNAMISCHE LABYRINTHE". Staatsexamensarbeit. PH Flensburg.

Ottmann, Th. (1973): Über Möglichkeiten zur Simulation endlicher Automaten durch eine Art sequentieller Netzwerke aus einfachen Bausteinen. *Zeitschrift für Mathematische Logik und Grundlagenforschung*, 19, 223-238.

Raven, J. C. (1965): Advanced progressive matrices. Sets I and II. London: Lewis.

Rödding, D. (1968): Klassen rekursiver Funktionen. In Lecture Notes in Mathematics. 70, 159-222. Berlin: Springer.

Ruf, U. & Gallin, P. (1999): Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 1. Seelze-Velber: Kallmeyer.

Schnalle, K. & Schwank, I. (erscheint 2006): Das Zahlen-Hochhaus [ZH]: Multiplikative Zusammenhänge im Hunderterraum. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2006.

Schwank, I. (1979): Limits and Possibilities of the Method of Thinking-Aloud. In D. Tall (Ed.), Proceedings of the 3rd International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 186-190. Coventry.

Schwank, I. (1980): Utilisation d'un matériel permettant de représenter et simuler des algorithmes. *Publications du laboratoire IMAG*, Cahier 10, Université I de Grenoble

Schwank, I. (1982): Automaten mit Präferenzen. Unveröffentlichte Staatsarbeit. Universität Osnabrück.

Schwank, I. (1984): Präferenzgesteuerte $\alpha\beta\gamma$-Automaten. Dissertation. Universität Osnabrück.

Schwank, I. (1986): Cognitive Structures of Algorithmic Thinking. In Proceedings of the 10th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 404-409. London.

Schwank, I. (1987a): $\alpha\beta\gamma$-Automaten Realizing Preferences. In E. Börger (Ed.), Computation Theory and Logic. Lecture Notes in Computer Science. 270, 320-333. Berlin: Springer.

Schwank, I. (1987b): Curriculares Rahmenkonzept für den Mathematikunterricht der Sekundarstufe I zum Aufbau grundlegender Modellvorstellungen für das Verständnis von Computern unter Berücksichtigung von handlungsorientierter Begriffsbildung. Gutachten für den Niedersächsischen Kultusminister. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schwank, I. (1998): DYNAMISCHE LABYRINTHE als Propädeutik für die formale Programmierung I + II – Training des dynamischen logischen Denkens. CD-Fassung deutsch und chinesisch.

Schwank, I. (1990): Zur Analyse kognitiver Strukturen algorithmischen Denkens. In K. Hausmann & M. Reiss (Hrsg.), Mathematische Lehr-Lern-Denkprozesse, 31-54. Göttingen: Hogrefe.

Schwank, I. (1992): Untersuchungen algorithmischer Denkprozesse von Mädchen. In A. Grabosch & A. Zwölfer (Hrsg.), Frauen und Mathematik. Die allmähliche Rückeroberung der Normalität? 68-90. Tübingen: Attempto.

Schwank, I. (1993): On the analysis of cognitive structures in algorithmic thinking. *Journal of mathematical behaviour*. 12/2, 209-231.

Schwank, I. (1996): Zur Konzeption prädikativer versus funktionaler kognitiver Strukturen und ihrer Anwendung. In: Analysenheft 'Deutsche psychologische Forschung in der Mathematikdidaktik'. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 6, 168-183.

Schwank, I. (1999/2000): QuaDiPF – Qualitatives Diagnoseinstrument für prädikatives versus funktionales Denken. Sets Versionen A/B/C. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schwank, I. (2002): Analysis of eye-movements during functional versus predicative problem solving. In J. Novotna (Ed.), CERME 2 – European Research in Mathematics Education II, Part 2, 489-498. Prag: Universität Prag.

Schwank, I. (2003): Einführung in funktionales und prädikatives Denken. In I. Schwank: Themenheft 'Zur Kognitiven Mathematik', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 35/3, 70-78.

Schwank, I. (2004): eLearning: Individualität als Herausforderung - Kognitionsdidaktische Notizen. In M. Franzen (Hrsg.), Die Zukunft von eLearning. Neue Erkenntniss aus Gehirnforschung, Pädagogik und Wirtschaft. 47-65. Zürich: EMPA-Akademie.

Schwank, I. (2005): Die Schwierigkeit des Dazu-Denkens. In M. von Aster / J.-H. Lorenz (Hg.), Rechenstörungen bei Kindern – Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik. 93-133. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Schwank, I., Aring, A. & Blocksdorf, K. (2005): Betreten erwünscht – die Rechenwendeltreppe. In Beiträge zum Mathematikunterricht 2005. 545-548. Hildesheim, Franzbecker.

Schwank, I.; Armbrust, S. & Libertus, M. (2003): Prädikative versus funktionale Denkvorgänge beim Konstruieren von Algorithmen. In I. Schwank: Themenheft 'Zur Kognitiven Mathematik', *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 35/3, 79-85.

Schwank, I., Bartz, S. & Hörnschemeyer, C. (1998): DYNAMISCHE LABYRINTHE – Eine Propädeutik für das Programmieren in der Grundschule. Band 2: Dokumentation von Unterrichtsstunden im 3. Schuljahr. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Schwank, I., Cohors-Fresenborg, E. & Goldberg, A. (1984): Algorithmischer Zugang zu neuen Begriffen: ggT. In M. Blume (Hrsg.), Tagungsbericht der Herbsttagung der Fachgruppe Blinden- und Gehörlosenschulen des Landesverbandes Niedersachsen der GEW, 36-55. Braunschweig.

Striethorst, A. (1997): Classifier geregelte alpha-beta-gamma-Automaten. Staatsarbeit. Universität Osnabrück.

Stolzmann, W. (1997): Antizipative Classifier Systems. Dissertation. Universität Osnabrück.

Van der Waerden, B.L. (1954): Denken ohne Sprache. In G. Révész (ed.), Thinking and Speaking. Amsterdam: North Holland. 165-174.

Voogd, W. (in Arbeit): Auf und ab in den Burgtürmen – Von Zählprotokollen zu geschickten Berechnungen. [Projekt: Staatsarbeit. Universität Osnabrück].

Xu, B. Y. (1994): Untersuchung zu prädikativen und funktionalen kognitiven Strukturen chinesischer Kinder bei der Auseinandersetzung mit Grundbegriffen der Programmierung. Osnabrück: Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.