

Zur Konzeption prädikativer versus funktionaler kognitiver Strukturen und ihrer Anwendung

Inge Schwank • Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik • Osnabrück

Abstract:

The subject of our interest is the investigation of a phenomenon which so long hasn't been considered in great depth. It refers to a new dimension of cognitive mechanisms for concept formation and thinking. The adjective "mathematical" isn't used because we are convinced that our reflections are not bounded to the mathematical cognition but also to other areas. We start with some basic reflections showing a deficit. This leads to the introduction of the theory of predicative versus functional cognitive structures. Some relations to the means of axiomatization known in mathematical logic are worked out and connexions to other conceptions in mathematics education as well as in psychology are given. The estimation of the disregarded functional dimension is of special interest. In a second part the theory is applied on the psychological concept "inductive reasoning" which is treated to be meaningful for general intelligence quite often. We figure out, that usually inductive reasoning is described in terms of predicative characteristics. We contrast this view with a functional variant. At least we present an experiment which can be used to show the relevance of our theoretical conception of predicative versus functional inductive thinking in practise.

Kurzreferat:

Gegenstand unseres Interesses ist die Untersuchung eines Phänomens, dem bislang in der Forschung wenig (systematische) Beachtung geschenkt worden ist. Dabei geht es um eine neue Dimension in den zu postulierenden kognitiven Mechanismen bei der Begriffsbildung und beim Denken. Der Verzicht auf das Adjektiv "mathematisch" erfolgt, weil wir davon ausgehen, daß unsere Überlegungen nicht eingeschränkt sind auf die mathematische Kognition, sondern auch in anderen Bereichen Bestand haben. Aus einer grundlagentheoretischen Problemanalyse heraus wird die Theorie der prädikativen versus funktionalen kognitiven Strukturen eingeführt, in der mathematischen Logik verankert und Bezüge zu anderen theoretischen Ansätzen sowohl in der Mathematikdidaktik als auch der Psychologie diskutiert. Der Positionierung der funktionalen Dimension gilt dabei unser besonderes Augenmerk. In einem zweiten Teil wird die eingeführte Theorie angewendet auf das für die allgemeine Intelligenz bedeutungsvolle psychologische Konstrukt "induktives Denken". Es wird aufgezeigt, daß üblicherweise eine prädikative Charakteristik induktiven Denkens gegeben wird. Dieser stellen wir eine funktionale Variante gegenüber. Zum Abschluß wird ein Experiment vorgestellt, mit dem nachgewiesen werden kann, daß die theoretische Spezifizierung induktiven Denkens nach prädikativ/funktional sich bei der Erklärung realen VP-Verhaltens bewährt.

ZDM-Klassifikation: C30, Q30

Deskriptoren: Grundlagen der Begriffsbildung, Kognition, induktives Denken, individuelle Unterschiede

Unsere Theorien sind unsere Erfindungen. Sie sind nie mehr als kühne Vermutungen und Hypothesen; von uns gemachte Netze, mit denen wir die wirkliche Welt einzufangen versuchen. Karl R. Popper

1. Stand der Forschung

Die allgemeine Lage

Unser Interesse gilt der Erforschung mathematischer Begriffsbildung (aus Anlaß von Problemlösen) unter kognitionswissenschaftlichem Aspekt. Die Interdisziplinarität stellt dabei ein besonderes Problem dar, welches schon von Hadamard in seinem Werk zur Psychologie der Erfindungen in der Mathematik formuliert worden war.

That difficulty is ... one which, in an increasing number of instances, hampers the progress of our knowledge: I mean the fact that the subject involves two disciplines, *psychology* and *mathematics*, and would require, in order to be treated adequately, that one be both a psychologist and a mathematician. (Hadamard, 1954, S.1, eigene Hervorhebung)

In der Mathematikdidaktik, die das Forum für eine solche Interdisziplinarität stellen könnte, bildet sich eine kognitionswissenschaftliche Orientierung (Davis 1984) erst allmählich heraus, nachdem die Szene lange vom stoffdidaktischen Ansatz beherrscht worden war. Von Glasersfeld charakterisierte das Manko - bis heute - zutreffend:

Die Art der Analyse jedoch, die den Weg zur Konstruktion mathematischer Begriffe Schritt für Schritt ergeben würde, hat kaum begonnen. (Von Glasersfeld 1987a, S. 292)

In der Psychologie als Bezugsdisziplin gibt es nicht so viel zu erben: Analog einem Argument von Waldmann & Weinert (1990), die sich mit der *Besonderheit* der Intelligenz von Hochbegabten befaßten, können wir in unserem Bereich sagen, daß die Erforschung der allgemeinen Begriffsbildung in der Psychologie noch nicht weit genug fortgeschritten ist, um einen ernsthaften Beitrag zum Problem der mathematischen Begriffsbildung leisten zu können.

Dörner (1973, S. 85) hat schon früh darauf hingewiesen, daß die psychologischen Begriffsexperimente einseitig nur dazu geeignet sind, Klassifikationsaspekte an Begriffen herauszuarbeiten und beklagt, daß schon aufgrund der Anlage der Experimente die Analyseinstrumente, die die Begriffsbildungsforschung zur Verfügung stellt, nicht ausreichen, um Fragen aus dem Leben, wie etwa, was begriffsbildungsmäßig abläuft, wenn ein Schüler in der Schule in einen neuen Bereich (z. B. Chemie) eindringt, zu beantworten (Dörner 1976, S.122f).

Ein Blick auf die Ergebnisse des kürzlich zu Ende gegangenen DFG-Schwerpunktprogramms "Wissenspsychologie" zeigt, daß der Durchbruch immer noch nicht gelungen ist. Insgesamt ist festzuhalten, daß eine *Denkpsychologie*, der unser Forschungsgebiet zuzuordnen wäre, wenig existent ist.

Ein konkretes Defizit

Allgemein anerkannt ist die Bedeutung von Sprache (Wortsprache) für das Denken und den Aufbau von Begriffen, hinzu kommt die Anerkennung einer eigenständigen Rolle visueller Vorstellungen (z. B. Paivio 1986) und erst jüngeren Datums hinsichtlich der theoretischen Fassung des Gedächtnisaufbaus motorische Vorstellungen begründet auf Untersuchungen zum Ausführen einfacher Handlungen (Multimodales Gedächtnis, Engelkamp 1990).

Zwar ist die Meinung verbreitet, daß das zentrale Element von Erklärungsversuchen bezüglich der Natur von Begriffsbildung und Wissen die von *Piaget* geprägte Ansicht ist, daß sich Denken aus dem Handeln *entwickelt* (z. B. Aebli 1980, 1981, von Glasersfeld 1987a, b, Davis 1992, Hoffmann 1992) und es wird hervorgehoben, daß letzten Endes die Grundlage aller Bedeutungen - in der Mathematik wie in anderen Bereichen - im "*sensorimotorischen Erleben und nirgendwo anders liegt*" (von Glasersfeld, 1987b, S. 420). Doch steht das theoretische Durchdringen der Ausführung einer Handlung und der abstrakten Verwaltung solcher Ausführungen noch aus. Es fehlt der Nachweis der unmittelbaren Wirksamkeit bei abstrakteren Begriffsbildungen.

2. "Motorisches" Denken bei mathematischen Überlegungen

Van der Waerden hat 1954 auf einem Symposium "Thinking and Speaking" unter dem Titel "Denken ohne Sprache" Begriffe und Schlußweisen der Mathematik auf ihren sprachlichen und nicht sprachlichen Gehalt hin untersucht und sich gefragt, welche Vorstellungen für einen mathematischen Begriff bzw. einen mathematischen Beweis wesentlich sind und welche nicht. Am Beispiel des Begriffs *Schneckenlinie* von Pascal führt er aus, daß für jeden Mathematiker, der diesen Begriff kennt, dieser durch 3 über Assoziationen miteinander zusammenhängende Vorstellungen repräsentiert ist: eine motorische, eine visuelle und eine sprachliche. Die entscheidende Bedeutung kommt in seinen Augen der motorischen Vorstellung zu.

Die erste Vorstellung ist wesentlich: hat man sie vergessen, so hat man den Begriff der Kurve nicht mehr, auch wenn man weiß, wie sie aussieht. (van der Waerden, 1954, S. 166)

Die visuelle mag noch für manchen nützlich sein, die Sprache ist in dem Begriffsbildungsakt überflüssig.

Die motorische Vorstellung vom Ziehen der Linien, Abtragen der Strecken usw. kann bei visuell Veranlagten auch durch die visuelle Vorstellung der gezogenen Linien und gleichen Strecken ersetzt werden. ... Die dritte Vorstellung, der Name der Kurve, ist völlig unwesentlich. ... Er [Pascal] hat einen *völlig klaren* Begriff von der Kurve gehabt, bevor er den Namen erfand. (van der Waerden, 1954, S. 166)

Gleiches wie für den Begriff der Schneckenlinie gilt auch für die in dessen Definition benutzten älteren Begriffe wie Kreis, mit dem wir uns noch weiter unten beschäftigen werden:

Im Begriff Kreis sind drei Vorstellungen vereinigt: die motorische Vorstellung einer rotierenden Strecke, die den Kreis erzeugt, die visuelle Vorstellung einer runden Linie und die Vorstellung des Wortes Kreis. (van der Waerden, 1954, S. 166)

Daß diese Sichtweise tragfähig ist, wenn vielleicht auch nicht als erstes jedem naheliegend, zeigt sich z. B. anhand moderner vektororientierter Graphikprogramme (z. B. Corel Draw), in denen, anders als in den älteren pixelorientierten Graphikprogrammen (z. B. Paintbrush), die Graphiken nicht als Sammlung von speziellen Punkten sondern über ihre Aufbauvorschrift gehandhabt werden. Dadurch ist ein sehr flexibler Umgang mit den Graphiken möglich.

Die modernen Graphikprogramme sind nur ein Beispiel für objektorientierte Programmierung, die versucht, nicht zwischen Daten und Prozeduren zu trennen, sondern sogenannte "active data" einzuführen, die code und data beinhalten.

An object that is a string is not just a passive piece of textual data. It is, in a sense, an active entity that knows how to perform various operations on itself correctly. For a lot of reasons, it makes quite a bit of sense to package the operations for various types of objects right with the objects. (Tello, 1991, S.32)

Auch wenn die durch ältere Konzeptionen der Computerwelt nahegelegte Vorstellung der Einteilung in deklaratives und prozedurales Wissen (z. B. Anderson 1993) in der Psychologie zu fruchtbaren Arbeiten geführt hat, so wurde sie weder von allen geteilt (z. B. Hoffmann 1990), noch kann sie, wie in der Informatik mit der modernen objektorientierten Programmierung vorgemacht wird, als die einzig funktionierende gelten.

Würde man z. B. Begriffe in der Metapher der active data ansetzen, könnte man in einem Begriff sowohl seine statischen Eigenschaften als auch seine dynamischen Tätigkeiten unterbringen (im Gegensatz etwa zu dem auf Merkmalen basierenden Klixschen Ansatz einer hypothetischen Struktur eines natürlichen Begriffs, z. B. Klix 1984; vgl. Schwank 1990b).

Es ist nicht davon auszugehen, daß sich alle Vorstellungen gleichermaßen über beide Dimensionen konstituieren, sowohl inhaltlich betrachtet als auch bei den verschiedenen Menschen. Eine besondere Leistungsstärke im Umgang in der Dimension der Charakterisierung eines Objektes über die es auszeichnenden Tätigkeiten oder die es auszeichnenden Eigenschaften könnte dann eine wichtige Verhaltenscharakteristik eines Menschen sein.

Wir kennen keine psychologische Theorie, in der dieses Phänomen abgehandelt und adäquat erfaßt ist.

3. Individuelle Unterschiede

Ein zentrales Interesse von uns gilt individuellen Unterschieden bei Menschen, wenn auch weite Bereiche der Psychologie nichts davon wissen wollen. Kelly (1969) beklagt, daß in den psychologischen Labors nach gesetzmäßigen Anteilen in der Psyche aller Menschen gesucht würde und man so den tatsächlichen individuellen Konstruktionen von Menschen nicht gerecht werden könne (vgl. auch von Glasersfeld 1995). So belegt z. B. Klix (1984) seine Annahmen zum kognitiven Umgang mit Begriffen mit Studien, die als Material solche Begriffe verwenden, von denen in Vorweguntersuchungen gezeigt wurde, daß sie keinen Ärger machen. Die Reichweite einer solchen Vorgehensweise ist dann in Frage gestellt, wenn eine *statistisch* erwiesenermaßen nützliche Maßnahme bei der Behebung der mathematischen Probleme eines individuellen Schülers nichts nützt.

Körner (1977), der sich die Aufgabe vornimmt, die allgemeine Struktur wissenschaftlicher Theorien und ihre Beziehungen zur Erfahrung darzustellen, setzt in seinen einleitenden, grundsätzlichen Überlegungen ganz in unserem Sinne verschiedene Schemata des empirischen Differenzierens an.

Es gibt - wenigstens *prima facie* - mehr als eine Art, die Welt in empirische Individuen, Klassen-*cum*-Relationen und Kontinua zu zerlegen. Betrachten wir z. B. die Kategorie des individuellen (physischen) Dings und die Kategorie individueller (physischer) Prozesse. ... Es kann also vorkommen, daß eine Person sowohl die Kategorie des individuellen Dings als auch die Kategorie individueller Prozesse beim Differenzieren der Welt verwendet, während eine andere Person vielleicht nur eine der beiden gebraucht. (a.a.O., S. 17)

Er betont, daß unterschiedliche Schemata des empirischen Differenzierens verschiedene Arten des Wahrnehmens und Denkens konstituieren. Nach ihm ist es möglich, sich die Welt als auf die eine oder andere Weise differenziert vorzustellen. Dabei kann jedes der betrachteten Schemata des empirischen Differenzierens *einige* Unterschiede in der Welt hervorbringen. In Anbetracht der Vielfalt der Schemata des empirischen Differenzierens stellt sich die Frage, ob es möglich oder unmöglich ist, jeweils vom einen ins andere zu übersetzen. (a.a.O., S. 29-31)

Wir wollen annehmen, daß unterschiedliche Menschen in ihren unterschiedlichen Schemata unterschiedlich leistungsfähige Werkzeuge zur Verfügung haben, wesentliche Aspekte der Welt kognitiv zu erfassen. Dies hat Konsequenzen für die Begriffsbildung und das Vorgehen beim Problemlösen.

Der Betonung des Unterschiedes zwischen Statik und Dynamik nimmt sich auch Bateson (1995⁴) an. Angesichts der Tatsache, daß "*die Sprache durch Syntax von Subjekt und Prädikat*" ständig versichert, "*daß die »Dinge« irgendwie Qualitäten und Attribute »haben«*" (a.a.O., S. 81) ist es ihm ein besonderes Anliegen, die dynamische Dimension hervorzuheben. Als ein Beispiel untersucht er den Begriff "Schalter" (vgl. auch Dörners Operatorbegriffe, 1973, S. 82; James' Analyse der Idee "Elastizität" bei der Diskussion seines pragmatischen Wahrheitsbegriffes, 1975, S. 96):

Wir bemerken nicht, daß der »Schalter« von einer ganz anderen Art ist als die Begriffe »Stein«, »Tisch« und so weiter. Eine genauere Untersuchung zeigt, daß der Schalter, betrachtet man ihn als Teil eines elektrischen Kreislaufs, nicht *existiert*, wenn er sich in der Stellung AN befindet. Aus dem Blickwinkel des Kreislaufs unterscheidet er sich nicht von dem Stromkabel, das zu ihm hin und von ihm wegführt. Er ist einfach nur ein »weiterer Leiter«. Wenn umgekehrt, aber ganz ähnlich, der Schalter auf AUS steht, existiert er aus dem Blickwinkel des Kreislaufs nicht. Er ist nichts, eine Kluft zwischen zwei Leitern, die ihrerseits nur dann als Leiter existieren, wenn der Schalter an ist.

Mit anderen Worten, der Schalter existiert *nur* in den Augenblicken, wo seine Einstellung verändert wird, und daher hat der Begriff »Schalter« ein besonderes Verhältnis zur *Zeit*. Er ist eher der Vorstellung »Veränderung« als der Vorstellung »Objekt« verwandt. (Bateson 1995⁴, S. 136)

In unseren Untersuchungen zum Erwerb grundlegender Programmierbegriffe haben wir uns einiger Begriffe solchen Typs angenommen (z. B. Schwank 1994).

Bateson schildert im weiteren seine eigenen Erfahrungen bei der Analyse einer neuguineischen Kultur und berichtet, wie er aus einem mehrfachen Wechsel zwischen Form- und Prozeßanalyse im Verständnis weitergekommen ist (Bateson 1995⁴, S. 236ff) und spricht in diesem Zusammenhang von der "*Zickzack-Leiter der Dialektik zwischen Form und Prozeß*" (a.a.O., S. 241). Auch wenn er sich selbst in der Lage sah, diese Zickzack-Leiter zu bewerkstelligen, merkt er doch später an, daß er Unterschiede bei den Menschen in ihrer Fähigkeit und Präferenz zu dem einen oder anderen Part vermutet:

Es wird sicher Menschen geben, die *lieber* glauben, daß die Welt überwiegend durch Kalibrierung [= Form, vgl. S. 243] interpunktiert wird ... Und es wird andere geben, die nur Prozeß ... sehen. (a.a.O., S. 250)

Es ist aus der kurzen von Bateson angegebenen Schilderung seines eigenen Vorgehens nicht ersichtlich, ob er in beiden Teilen "gleichermaßen tüchtig" war. In unseren Untersuchungen konnten wir nachweisen, daß es tatsächlich Menschen gibt, die eher zu der einen oder der anderen Art geistiger Orientierung neigen (z. B. Schwank 1994).

4. Eigenständigkeit der Dimension der "motorischen" Erzeugung

Um die verbreitete Vorstellung zu "motorisch" von der van der Waerdenschen zu trennen, müßte konsequent ein Index mitgeführt werden. Nicht jede Handlung trägt den Charakter einer Aufbauvorschrift. Werden z. B. Elemente des didaktischen Materials "Logische Blöcke" hin und her geschoben, um die Vereinigungsmenge aller roten Elemente zu bilden, liegt hier keine solche Handlung vor, gleiches gilt etwa für den Fall der von Engelkamp (z. B. 1990, Engelkamp & Zimmer 1985) untersuchten Aktionen wie "Haare kämmen". Im weiteren Verlauf wird der van der Waerdensche Gebrauch von "motorisch" in unserer Konzeption des "funktionalen Denkens" aufgehen.

Im Unterschied zu Dörner et al. sehen wir uns veranlaßt, eine eigenständige kognitive Dimension zur Behandlung der van der Waerdenschen "Motorik" zu postulieren, die sich nicht mit der visuellen deckt. In einem seiner neueren, gemeinsam mit Ehrlenspiel geleiteten DFG-Projekte "Denkabläufe beim Konstruieren" geht es um die Frage, welches Denken Maschinenbauer anwenden, wenn sie (mehr oder weniger erfolgreich) Konstruktionen durchführen. Hauptaugenmerk gilt dabei den visuellen Vorstellungen, motorische Vorstellungen bleiben unberücksichtigt. Dies hatte uns insoweit verwundert, als die von uns eingesetzten Probleme zur Konstruktion funktionsfähiger (Rechen-)maschinen mit unterschiedlichen Bauteilen auf einem Steckbrett (Mikrowelt "Dynamische Labyrinth", s. z. B. Schwank 1994) eine gewisse Verwandtschaft mit den von den Maschinenbauern zu bearbeiteten Problemen erkennen lassen. Tatsächlich wird aber in den Projektarbeiten (z. B. Eisentraut 1994, im Druck) ausgeführt, daß es die visuellen Vorstellungen sind, die beim Konstruieren von wesentlicher Bedeutung sind, gute Konstrukteure (Maschinenbauer) zeichnet eine gute visuelle Leistung aus. Mit bildhaften Assoziationen wird die Aufgabe verstanden und mit bildhaften Assoziationen wird eine Lösung gefunden. Es wird nicht in Frage gestellt, inwieweit die "Optik" die Natur eines Mechanismus ausdrückt. Das Phänomen des Batesonschen Schalters bleibt so unberücksichtigt. Stoßen die bildhaften Assoziationen an ihre Grenzen, muß auf Sprache ausgewichen werden.

Allerdings reicht die Analyse - zumindest mit unseren Augen betrachtet - dicht an unsere Konzeption heran, wenn z. B. in den Beschreibungen des Umgangs mit bildhaften Assoziationen plötzlich auf einen im "Wissensvorrat gespeicherten *Mechanismus*" Bezug genommen wird:

Bei der Lösungsidee unseres Konstrukteurs handelte es sich um eine *bildhafte Assoziation*, die durch zwei Dinge ausgelöst wurde: ... Und zum anderen griff der Konstrukteur auf einen ihm bekannten und in seinem Wissensvorrat gespeicherten Mechanismus zur Neigungsverstellung zurück, nämlich auf die Vorstellung des Liegestuhls mit verstellbarer Rückenlehne, der nach demselben Prinzip funktioniert wie die Verstellung des bisherigen Schreibtisches. (Eisentraut, im Druck)

Bleibt anzumerken, daß Dörner in einer früheren Arbeit (1973) einmal mit einer der van der Waerdenschen Motorik näherliegenden Idee des "Operatorbegriff" gearbeitet hat, diese dann aber nicht weiter verfolgte und sozusagen aus den Augen verlor.

Beispiel zur Spezifität "motorischer" Erzeugung

Die Eigenständigkeit der motorischen Dimension wollen wir noch an einem Beispiel verdeutlichen. Betrachten wir einen Kreis, der mit Corel Draw gemalt wurde und vergleichen diesen mit einem zweiten (Abb. 1a). Aufgrund des *visuellen* Eindrucks gelangt man zur Feststellung, daß beide Kreise *gleich* sind (tatsächlich haben beide Kreise den *gleichen* Durchmesser). Trotzdem unterscheiden sie sich in einer Dimension. Um das zu sehen, öffnen wir beide Kreise, es entstehen zwei gleich aussehende Kreisbögen (Abb. 1b). Beide Linien behandeln wir weiter gleich. Wir geben ihnen mit der gleichen Operation ein anders geformtes Ende (Abb. 1c). Trotz gleicher Behandlung gleicher Linien erhalten wir ein unterschiedliches Ergebnis (Abb. 1d). In dem einen Fall zeigt der Kreisbogen rechts herum, in dem anderen links herum. Die Ursache liegt darin, daß Corel Draw die Kreise nicht nach ihrem Aussehen behandelt sondern nach ihrer *Aufbauvorschrift*, im ersten Fall wurde ein Kreis (mit einer bestimmten

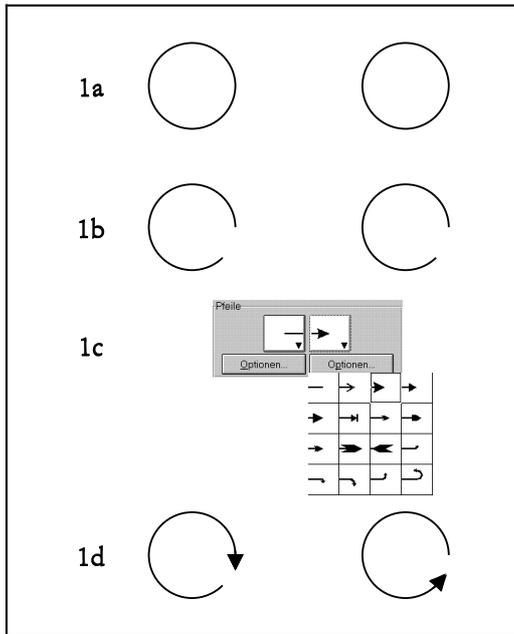


Abb. 1: Visuelle kontra "motorische" Charakteristika (Erklärungen s. Text)

Liniendicke, -art, -farbe, Stiftform) *rechtsberum* gezeichnet im zweiten einer mit gleichem Durchmesser (derselben Liniendicke, -art, -farbe, Stiftform), also visuell ununterscheidbar, aber diesmal *linksberum*. Damit haben die beiden Kreise eine unterschiedliche Drehrichtung und so an unterschiedlicher Seite ihren Anfang (Start) und ihr Ende (Ziel). Die vom optischen Eindruck her gleichen Linienden unterscheiden sich wesentlich in der motorischen Dimension ihrer Erzeugung. In der Folge wirkt sich die Auswahl des in der Dialogbox rechten Liniendes *visuell* betrachtet in beiden Fällen *unterschiedlich* aus: einmal erhält mit ein und derselben Aktion das obere Liniende einen Pfeil, das andere Mal das untere. Von der *Motorik* her gesehen passiert mit beiden Linien das *Gleiche*: beide Male erhält das Ziel-Liniende den Pfeil. Die von der Waerdenschen "motorischen" Vorstellungen lassen sich nicht nur als ein Fall "visueller" Vorstellungen abtun.

5. Theorie prädikativer versus funktionaler kognitiver Strukturen

Als seien wir einem Rat von Dörner (1989, S. 94ff) gefolgt, wie man auf eine neue Theorie kommen könnte, haben wir zunächst einmal Einzelfälle beim mathematischen Problemlösen über einen langen Zeitraum hinweg beobachtet. Im Rahmen der Analysen dieser Beobachtungen sind wir auf das in den vorangegangenen Abschnitten diskutierte Phänomen gestoßen und haben zu seiner theoretischen Fassung neue theoretische Konstrukte geschaffen (Schwank 1986, 1990b, 1993b).

Wir unterscheiden bei einem Menschen, der sich in seiner Umwelt mittels seiner Kognition Orientierung verschafft, zwischen dem Einsatz einer prädikativen und dem einer funktionalen kognitiven Struktur. Wir vermuten, daß nicht beide Anteile bei allen Menschen gleich stark ausgeprägt sind. Dies könnte zur Klärung beitragen, warum manche Menschen gerade in naturwissenschaftlich-technischen Gebieten sich erfolgreich und gerne engagieren und andere nicht.

Bei Anwendung einer prädikativen kognitiven Struktur sprechen wir von einem prädikativen Denken, dieses ist ein Denken in Beziehungen und Urteilen, bei Anwendung einer funktionalen kognitiven Struktur sprechen wir von einem funktionalem Denken, dieses ist ein Denken in Handlungsfolgen und Wirkungsweisen. Daraus resultiert eine unterschiedliche Haltung in Anbetracht eines Problems. (Wir sprechen nur in solchen Fällen von einem Problem, in denen die Lösung nicht (einfach) durch Anwendung eines erworbenen Schemas hergestellt werden kann.)

Bei der Sichtung eines Problems wird eine unterschiedliche "Brille" aufgesetzt und so vom Typ her unterschiedliche Akzente gesetzt: Im prädikativen Fall werden die das Problem konstituierenden *Prädikate* kognitiv erfaßt (als bildliche Metapher benutzen wir die Sichtweise der zusammenzufügenden Puzzlesteine); im funktionalen Fall werden die das Problem konstituierenden *Funktionen* kognitiv erfaßt (als bildliche Metapher benutzen wir die Sichtweise des Eingang zu setzenden Zahnradgetriebes). Die Art des Zurechtlegens des Problems beeinflusst die Begriffsbildung sowie die Überlegungen zur Problemlösung wesentlich. Unterschiedliche Maßnahmen zur Problembearbeitung werden ergriffen, zur Aktion eine "Spritze" mit unterschiedlichen Wirkstoffen angesetzt.

Der gesamte Vorgang ist rekurrent. Die Wirkung der "Brille" gründet sich auf den in der Vergangenheit aufgebauten internen begrifflichen Repräsentationen, diese sind ihrerseits entstanden in Folge des vorherigen Umgangs mit der sich zuvor der Erfassung bietenden Situation. Die beobachtete unterschiedliche Leistungsstärke in einer der beiden kognitiven Strukturen erklären wir uns so, daß nicht gleichermaßen beide Arten zur Anwendung kamen und so ein unterschiedlicher Ausbau einer mehr statischen oder mehr dynamischen internen begrifflichen Repräsentation vorgenommen wurde, was dann wiederum gerade diese Art des Erfassens und Eingreifens stärkt. Diese wird sozusagen zum

“Steckenpferd”, es stellt sich eine Präferenz ein. In einem gestellten Problem wird dann zunächst einmal entweder die Struktur oder das Funktionieren gesichtet, mit den entsprechenden Folgen, in der Art das Problem zu wälzen und Eingriffsmaßnahmen zu wählen.

Zur Erklärung der Ursachen (Veranlagung, Sozialisation) dafür, welche der beiden Arten kognitiver Strukturen von einem Individuum stärker ausgebaut wird, können wir wenig beitragen. Die Bearbeitung solcher Fragestellungen liegt außerhalb unseres Forschungsbereiches. Wir wissen allerdings, daß der von uns beobachtete geschlechtsspezifische Unterschied (Mädchen im Vergleich zu Jungen eher prädikativ, Jungen auch funktional, z. B. Schwank 1994) spätestens im Grundschulalter auftritt (Schwank 1996) und er sich gut verträgt (s. Schwank 1990a, S.94/95) mit den aufgrund psychobiologischer Analysen herausgearbeiteten geschlechtsspezifischen Unterschieden von Bischof (1979) und Bischof-Köhler (1990).

Die Bezeichnung “prädikativ/funktional” ist in Analogie zu Ergebnissen der mathematischen Logik gewählt (z. B. Surányi 1959, Hermes 1971², Börger 1986², Börger et al. im Druck). Dort ist bekannt, daß es für eine Reihe von grundlegenden Begriffen *unterschiedliche* Axiomatisierungen gibt. Üblicherweise enthält eine *Prädikatenlogik* Funktionsbezeichnungen als Grundbegriff; es gibt aber *auch* die Möglichkeit, den *Funktionsbegriff* als abgeleiteten Begriff über den Begriff der *Relation* (einem n-stelligen *Prädikat*) einzuführen. Das heißt, es gibt eine *prädikative* Welt, in der die inhaltlichen mathematischen Überlegungen errichtet werden können, und eine andere, ebenbürtige *funktionale* Welt, aber eben mit jeweils anderen Ausgangskonzepten und anderen, dazu passend abgestimmten Werkzeugen. Wie bei Kinderspielzeug werden unterschiedliche Bausteintypen angeboten und infolge unterschiedliche Umgangsweisen mit ihnen (z. B. Lego versus Construx von Fisher-Price, mit beiden Systemen lassen sich Autos bauen, aber eben anders). Die Ergebnisse der Reduktionsforschung der mathematischen Logik können wir als Stützpfiler bei unseren Überlegungen zum (syntaktischen) Typ der verwendeten Ausdrucksmittel der Kognition benutzen und dabei den Überlegungen Körners (1977) zu verschiedenen Schemata empirischen Differenzierens gerecht werden. Vergleichbar dem in der mathematischen Logik bekannten Dualismus “Prädikate/Funktionen” bei der Wahl der Grundbegriffe und den dadurch bestimmten Werkzeugen setzen wir den beschriebenen Unterschied beim Typ der kognitiven Struktur an: *prädikativ* für den Fall, daß die Sicht der Welt durch Prädikate und zugehörige Werkzeuge charakterisiert ist, *funktional* für den Fall, daß die Sicht der Welt von Funktionen und zugehörigen Werkzeugen lebt.

In der Kommunikation über diese unterschiedlichen Sichtweisen ergeben sich gelegentlich Schwierigkeiten dadurch, daß - wie in der mathematischen Logik bekannt - die eine Welt in der jeweils anderen Welt simuliert, also nachgebaut, werden kann - dies allerdings möglicherweise mit unterschiedlichem Aufwand.

Betrachten wir in einem Gedankenexperiment ein Gespräch über das oben erwähnte Spielzeugauto. Es ist denkbar, daß der nach außen produzierte Teil des Gesprächs solange bruchfrei erlebt wird, wie er von der jeweils anderen Seite verstanden und nicht moniert wird, weil die Wortmarken in beiden Welten an eine Bedeutung geknüpft sind, die funktioniert, nur eben in beiden an eine andere. So kann im Bericht über ein Auto, das eine funktionale Entstehungsgeschichte hat, dieses bei einem Zuhörer (mit genügender intellektueller Leistungsfähigkeit) seinen funktionalen Charakter verlieren, ohne daß es im Gespräch zu einem Widerspruch kommt, da der Zuhörer sich immer die prädikative Variante aus dem Gehörten zurechtlegt, der Berichterstatter bei dessen Reaktionen wiederum zustimmend nickt, weil er umgekehrt die funktionale Variante heraushört. Beide verstehen sich gut und reden im Kern der Sache dennoch aneinander vorbei.

Die Tatsache, daß bei der Simulation (Rekonstruktion im Sinne der mathematischen Logik) einer Konstruktion in einem anderen Umfeld sich der zu tätigende Aufwand normalerweise unterscheidet, kann in Untersuchungen wie folgt ausgenutzt werden: es werden prädikative und funktionale Aufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades gestellt. Dann schneidet - vorausgesetzt unsere Vermutung der Vorliebe für eine der beiden kognitiven Strukturen trifft zu - ein Problemlöser, der bei den prädikativen Aufgaben sehr erfolgreich ist, d. h. hier elegante Lösungswege in kurzer Zeit findet, bei den funktionalen Aufgaben vergleichsweise schlecht ab, weil er hier aufgrund seiner dafür nicht so gut passenden Werkzeuge einen größeren Aufwand betreiben muß - wenn er überhaupt in der Lage ist, das Ziel

zu erreichen. Entsprechendes gilt für einen Problemlöser, der bei funktionalen Aufgaben sehr erfolgreich ist und mit seinen nur behelfsmäßigen Werkzeugen prädikative Aufgaben unsauber bearbeitet. Eine andere Variante sind Probleme, die gleich aufwendig beide Umgangsweisen erlauben, sich aber im angebotenen Lösungsweg in typischer Weise unterscheiden.

Anmerkungen

Unsere auf kognitive Mechanismen abzielende Verwendung von "funktionalem Denken" ist nicht mit dem verbreiteten Gebrauch dieser Bezeichnung (z. B. von Harten et al. 1986, Vollrath 1989) zu verwechseln, der sich auf das Denken bei der Behandlung der Aspekte des mathematischen Funktionsbegriffs bezieht.

Ebenso sind die von Hoffmann (z. B. 1992, 1993) über funktionale Äquivalenz konzipierten Begriffe nicht in unserem Sinne solche, die (unbedingt) aufgrund funktionaler Begriffsbildung entstanden sind. Hoffmann gebraucht die Bezeichnung "funktional" lediglich dafür, um die Begriffsbildung an in der Verhaltenserfahrung auftretende Anforderungen zu binden. Damit kann er beispielsweise erklären, daß Floristen aus der "*berufsbedingten Notwendigkeit ständiger Differenzierungen*" in anderer Weise über Blumenbegriffe verfügen als Laien (Hoffmann 1994, S. 408-409), also ein typisches prädikatives Klassifikationsproblem besser lösen. Die in seinem kognitiven Mechanismus der antizipativen Verhaltenssteuerung vorgesehenen Lernvorgänge berücksichtigen gerade keine Analyse des R, das von einem S zu einem S' führte, sondern nur (ggf.) eine Ausdifferenzierung von S in Abhängigkeit von einer Übereinstimmung der tatsächlich eingetretenen Situation S' zur antizipierten Situation S' _{Ant} (z. B. Hoffmann 1993, S. 44f). "Funktional" bedeutet also bei Hoffmann nur, daß die Ausprägung eines Begriffes von seinem Einsatz abhängt, aber nicht die Betonung einer besonderen Einsicht in Funktionieren, Mechanismen, Maschinen etc.

Näher an unseren Vorstellungen zu "funktional" liegt die Konzeption "Funktionalwert" (Köhler 1921, Duncker 1935). Allerdings brauchen wir den positiven Fall der Fähigkeit zur geschickten Handhabung von Funktionalwerten (auch solchen abstrakterer Natur) und darüber eine tragende Konstitution von Begriffen, aber nicht nur wie bei Duncker eine heterogen funktionale Gebundenheit, die zu einer Beschränkung der Anzahl möglicher Funktionen des Lösungsgegenstandes führt. In der Literatur wird die in unserem Sinne funktionale Komponente im Konzept "Funktionalwert" eher vernachlässigt. So schreibt z. B. Lürer (1973, S. 118), nur davon, daß eine "*Liste von Unterschieden*" zwischen Gegebenem und Gefordertem anzulegen ist und eine Änderungsabsicht gegeben sein muß. Er versteht die Ausgangssituation nicht als eine solche, die genuin in unserem Sinne funktionale Anmutungsqualitäten besitzt. Die Idee des Funktionalwertes scheint in neuerer Zeit nicht weiter ausgearbeitet worden zu sein.

Unsere Vorstellung zu "funktional" könnte zu einem weiteren Aufbrechen des von Bischof (1995, S. 354ff) diskutierten Interaktionsparadoxons beitragen, welches mit der Auffassung zu tun hat, daß Wahrnehmung und Handlung (Sensorik und Motorik) qualitativ total inkommensurabel sind und sich also die Frage stellt, wie denn die eine Sorte überhaupt in die andere kognitiv "umgerechnet" werden kann. Statt eine Transformation des sensorischen Kodes zu gegebener Zeit in einen motorischen Kode vorzusehen, schlägt Bischof einen fließenderen Übergang vor. Als Beleg für die Brauchbarkeit seiner Vorstellung führt er die Emotionen an und verweist auf Lersch (1970) und Metzger (1954). Betrachten wir beispielsweise die Gefühlsregung des Erschreckens. Ein lautes Geräusch beinhaltet für ein Reh die Aufforderung zum Wegrennen; es gibt nicht erst ein S (Geräusch), das analysiert wird, um daraufhin auf die Idee zu kommen, wegzurennen (R). Neben dem Hinweis auf Emotionen hätte Bischof als weiteres Beispiel unsere Konzeption des funktionalen Denkens anführen können. In dem von Bischof angegebenen Bild denken die funktionalen VP "näher" als die prädikativen VP an dem tatsächlich möglichen R, da sie sich die Situation S sowieso über eine Art R erschließen und schießen sozusagen durch. Unsere Beobachtung, daß funktionale VP eher zu einem sequentiellen Problemlösestil neigen als prädikative, paßt hier gut. Im Informatikunterricht kann man beobachten, daß so mancher sich leicht von der Möglichkeit des sofortigen Ingangsetzens ausgedachter Aktionen (soweit es die Programmiersprache zuläßt) hinreißen läßt und ein großes Spielkind ist, während andere dem R weitaus ferner stehen und sich erst mit anderem Denken beschäftigen.

Papert - der nicht nur die Programmiersprache LOGO erfand, sondern von sich selbst behauptet, daß er bereits in seiner Kindheit begeistert Ketten von verschalteten Zahnrädern in seinem Kopf drehen ließ (Papert 1980, S. vi) - hat sich zusammen mit Turkle unter dem Stichwort "bricoleur" dem Phänomen der "Spielkinder" angenommen (z. B. Turkle & Papert 1993) und viel Mühe darauf verwendet, dieses als "intelligentes" Verhalten zu beschreiben. (Ein vergleichbares Anliegen vertritt Hartmann (im Druck), der in einem der Sprachwissenschaft entlehnten Begriffsgebrauch den Nutzen eines stärker funktionellen Zugangs statt des üblichen strukturellen Zugangs in der Mathematik/Informatik propagiert.)

Von dem Trio Dubinsky / Sfard / Tall kommen uns die Vorstellungen von Tall (z. B. 1994, 1995) am nächsten. Er startet mit der Überlegung, daß Elementarmathematik mit der Wahrnehmung von und Handlung mit Objekten beginnt. Daraus ergeben sich für ihn zwei Säulen, die in ihrem Zusammenwirken zu fortgeschrittenem mathematischen Denken führen können. Die Handlung von Objekten wird von der Kognition auf einer Zwischenstufe in Form von sogenannten *procepts* (*process-concept*) gefaßt. Man könnte meinen, daß funktionale VP es besonders gerne mit dem process-Anteil der *procepts* zu tun haben. Hat man allerdings in der Entwicklung die Fähigkeit zu fortgeschrittenem mathematischen Denken erreicht, ist bei Tall die Trennung wieder aufgehoben, beide Teile der durch die Wahrnehmung induzierte wie auch der durch die Handlung induzierte fließen zusammen und stellen gemeinsam die Plattform für höheres mathematisches Denken. Das heißt Tall argumentiert nicht nur deutlich mathematisch-inhaltlich, sondern er sieht beim Mathematiker auch keine Vorliebe/besondere Fähigkeit in der einen oder anderen Dimension zu denken. Uns interessieren Mathematiker auch in ihrer kognitiven Individualität, die geschaffenen Produkte sind nicht alle gleichartig (man vergleiche z. B. die Turingmaschine als funktionales universelles Berechnungskonzept mit den prädikativen, ebenfalls berechnungsuniversellen μ -rekursiven Funktionen, s. dazu auch unsere Diskussion zu unterschiedlichen Ansätzen der adäquaten Mathematisierung des intuitiv gegebenen Berechenbarkeitsbegriffs, Schwank 1995, vgl. auch Davis 1965, 1982).

Dubinsky (z. B. 1991, Cottrill et al. im Druck) setzt seine APOS-theory (action, process, object, schema) insoweit für unser Anliegen zu eng an, als diese begründet auf Piagetschen Vorstellungen eine Hierarchie der mathematischen Begriffsbildung vorsieht, die für dem in unserem Sinne Funktionalen nur einen niederen Rang zuweist.

Sfard (z. B. 1991) argumentiert am Beispiel der Zahlbegriffsentwicklung aus der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik heraus und setzt zwei Vorgehensweisen an: structural - operational. Diese Unterscheidung verträgt sich aus vielerlei Gründen nicht mit unserem Ansatz, z. B. weil bei operational conceptions die Sprache für die internen Repräsentationen eine wichtige Rolle spielt, während es bei structural conceptions visuelle Vorstellungen sind, oder weil die structural conceptions die höherwertigen sind (vgl. Sfard 1991, S. 33).

Wir konnten hier nur einige Querbezüge herstellen, hoffen aber, daß mit dieser recht heterogenen Auswahl der eine oder andere nützliche Anhaltspunkt gegeben ist, um auch andere von uns hier nicht genannte Ansätze besser in Relation zu unserer eigenen Konzeption verstehen zu können.