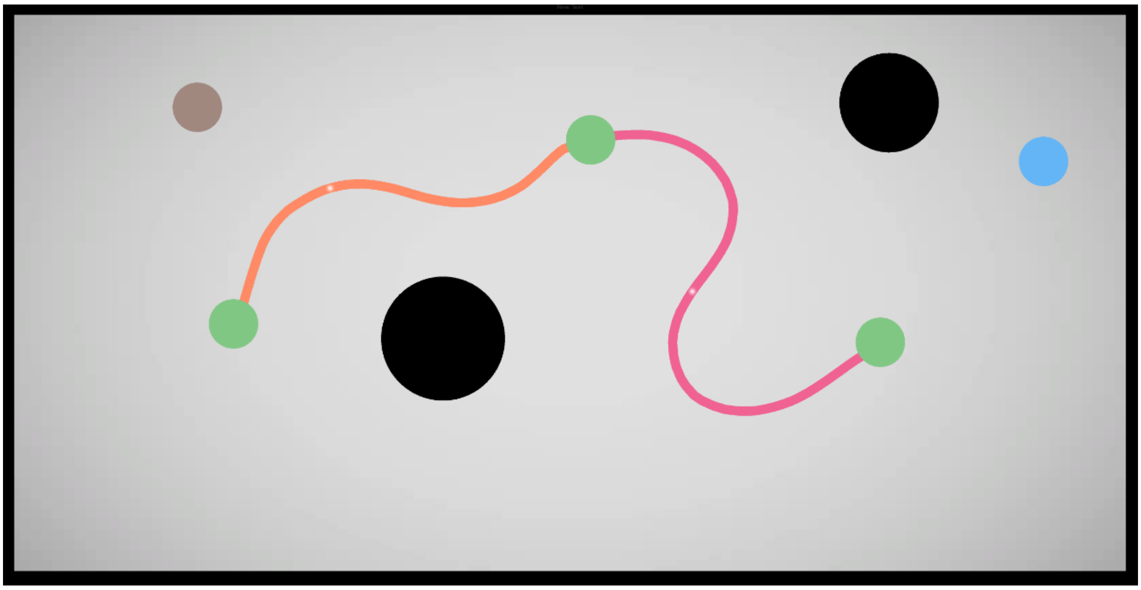
Moritz SÜMMERMANN, Köln

Touchbasierte Lernumgebung für Homotopien

In diesem Beitrag stelle ich kurz und informell eine Lernumgebung namens *Ariadne* in Form eines Tablet-PC-Programms vor. Es ist schwierig, solch ein dynamisches Programm in dieses statische Format zu fassen, der geneigte Leser ist daher eingeladen sich die Videos über *Ariadne* auf meiner Homepage anzuschauen oder es auf einem Gerät mit Touchfunktion selber auszuprobieren (www.mathedidaktik.uni-koeln.de/11924.html).

Die Forschungsfrage meiner Dissertation lautet, ob man mit dieser Lernumgebung in der Lage ist, das Konzept von Homotopien zu verstehen. Meine Zielgruppe ist die Primarstufe, um ein möglichst unvoreingenommenen Blick auf Mathematik zu ermöglichen.

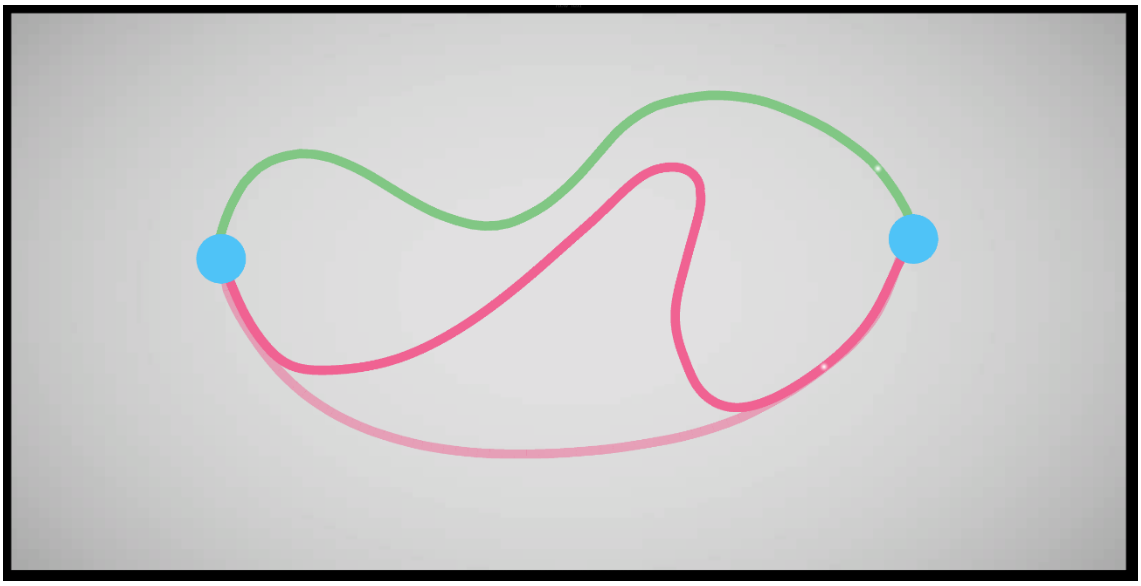
Zunächst ist im Programm nur ein graues Feld mit schwarzen Bereichen zu sehen. Durch Berührung des Bildschirms kann man nun Punkte auf dem Feld setzen, aber nicht auf den schwarzen Bereichen. Die schwarzen Bereiche spielen mathematisch die Rolle von „Aussparungen“ bzw. „Hindernisse“ der Ebene. Durch ziehen der Punkte mit dem Finger entstehen Wege zwischen Punkten, wobei auch diese nicht die Hindernisse queren können. Dabei haben durch Wege verbundene Punkte dieselbe Farbe, um diese Beziehung der Verbundenheit zu verdeutlichen.



Screenshot 1: Punkte, Wege und Hindernisse

Zwei aneinander anknüpfbare Wege, das heißt bei denen der Endpunkt des einen Weges Startpunkt des anderen ist, können durch gleichzeitige Berührung von je einem Finger verbunden werden.

Nun gibt es auch „Wege zwischen Wegen“, sogenannte Homotopien. Diese werden durch das Ziehen eines Weges mit einem Finger realisiert. Sobald man einen Weg vollständig auf einen anderen Weg gezogen habe, bekommen auch diese Wege dieselbe Farbe. Diese Wege heißen „homotop“ zueinander. Auch hier stellen die schwarzen Bausteine wieder Hindernisse dar. Ein Sonderfall stellt hier das Ziehen eines Weges mit dem gleichen Start- und Endpunkt auf ebendiesen dar, solch einen Weg nennt man „nullhomotop“.



Screenshot 2: Eine Homotopie zwischen zwei Wegen

Eine weitere Funktion von *Ariadne* ist die Anzeige der sog. „Windungszahl“ eines Weges um ein Hindernis. Nicht dargestellt, aber ebenfalls im Programm implementiert sind dreidimensionale Objekte wie der Torus oder die Sphäre, auf denen wie auf dem Feld in den Screenshots Punkte gesetzt und Wege gezogen werden können.

Diese Lernumgebung beruht auf Mathematik aus dem Teilgebiet der algebraischen Topologie. Für Informationen über diese verweise ich auf Lehrbücher wie Hatcher, 2003 oder Bredon, 2013.

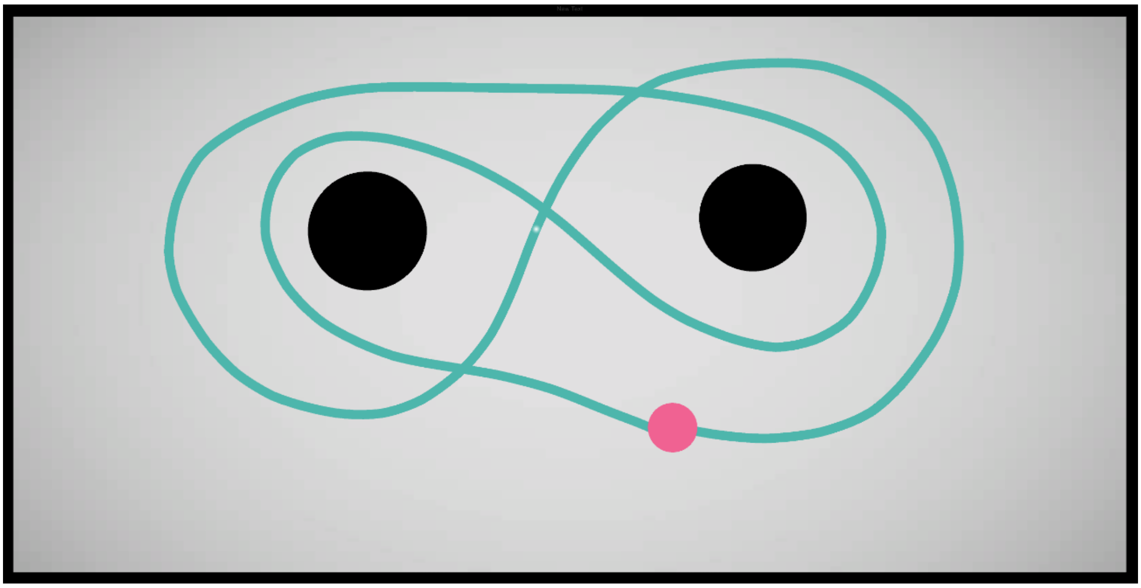
Nur mithilfe dieser einfachen Funktionen können sowohl einfache als auch sehr komplexe Aufgaben aufgeworfen und bearbeitet werden. Das Vokabular gilt es natürlich dem Entwicklungsstand des Kindes anzupassen, möglicherweise auch von ihm selber wählen zu lassen. Verschiedene Fragen, in verschiedener Schwierigkeit, sind beispielsweise:

1. Welche Punkte kann man verbinden?
2. Wie viele verschiedene Farben der Punkte gibt es minimal in diesem Bild?
3. Kann man diesen Weg zu diesem anderen umformen?
4. Sind diese Wege nullhomotop? Sind sie zueinander homotop? Was ist ihre Windungszahl?
5. Wie viele verschiedene, das heißt nicht homotope, Wege gibt es hier?
6. Kann man Hindernisse setzen, so dass dieser Weg nicht nullhomotop ist?
7. Kann man einen Weg mit Windungszahl 3 malen?
8. Wie viele verschiedene Wege gibt es hier?
9. ...

Dies sind alles genuine mathematische Fragen aus der algebraischen Topologie. Manche dieser Fragen sind auch für Grundschulkinder schnell zu beantworten, andere brauchen viel Arbeit in Form von Beispielen und Gegenbeispielen. Dabei kann auch die zugrundeliegende mathematische Struktur genutzt werden. Beispielsweise gibt es einen Weg von Punkt A zu Punkt C, falls es einen Weg von A nach B und von B nach C gibt. Dem ist so, da „homotop zu" eine Äquivalenzrelation ist. Dies kann genutzt werden, ohne den Begriff der Äquivalenzrelation explizit einzuführen, und somit das Denken in mathematischen Strukturen fördern.

Das Thema Homotopien und Wege bietet sich für Computerumgebungen an, da es keine physikalischen Materialien mit den gewünschten Eigenschaften eines Weges gibt. Ein solches Material müsste beliebig verformbar und dehnbar sein. Kandidaten wie Lehm (Nobel Committee for Physics, 2016) oder Gummibänder (Szpiro, 2008) erfüllen dies zwar teilweise, haben aber natürliche Grenzen. Mithilfe des Computers können diese Grenzen zulasten der dann fehlenden Haptik überwunden werden.

Ein weiteres durch *Ariadne* angesprochenes Thema ist das *Machen* von Mathematik im Gegensatz zum *Wissen* darüber (Papert, 1972). Das bedeutet in diesem Fall die Konstruktion von Objekten durch den Benutzer, um Fragen aufzuwerfen oder zu beantworten. Aufgestellte Hypothesen über diese Objekte können durch Ausprobieren bestätigt oder widerlegt werden, ohne eine externe Autorität, wie beispielsweise einen Lehrer, zurate ziehen zu müssen.



Screenshot 3: Die "Pochhammer-Weg", ein nicht nullhomotoper Weg mit Windungszahl 0 um beide Hindernisse (Siehe z.B. Wang, 1989, S. 105)

Nicht zuletzt ist es ein interessanter Aspekt, ein zentrales Thema der modernen Mathematik elementar vermitteln zu können.

Die Lernumgebung wurde bisher nur mit Erwachsenen Nicht-Mathematikern getestet, der nächste Schritt ist die Analyse vermöge qualitativer Untersuchungen mit Grundschulkindern.

Literatur

Bredon, G. E. (2013). *Topology and geometry* (Vol. 139). Springer Science & Business Media.

Hatcher, A. (2003). *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Nobel Committee for Physics. (2016). *Popular science background: Strange phenomena in matter's flatlands*. Zuletzt zugegriffen am 05. April 2018 unter https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2016/popular-physicsprize2016.pdf

Szpiro, G. G. (2008). *Poincare's Prize: The Hundred-Year Quest to Solve One of Math's Greatest Puzzles*. Penguin.

Papert, S. (1972). Teaching children to be mathematicians versus teaching about mathematics. *International journal of mathematical education in science and technology*, *3*(3), 249-262.

Wang, Z. X., & Guo, D. R. (1989). *Special functions*. Singapore: World Scientific.